

Олександр Чумак

**Надпровідні кола з кубітами, утвореними
джозефсонівськими контактами.**

Лекції для аспірантів другого року навчання фізико-математичного
факультету, кафедра загальної фізики та фізики твердого тіла

2018 р.

Зміст

1. Вступ.

2. Частина 1.

1.1. НАДПРОВІДНІ СИСТЕМИ.

- 1.1.1. Фаза хвильової функції надпровідника.
- 1.1.2. Квантування магнітного потоку, квант потоку.
- 1.1.3. Проходження надпровідного струму через контакт.
Рівняння Джозефсона.
- 1.1.4 Проходження струму через кільце з двома джозефсонівськими контактами.

1.2. ФАЗОВИЙ КУБІТ, КЕРОВАНИЙ СТРУМОМ.

- 1.2.1. Гамільтоніан системи.
- 1.2.2. Руйнівне вимірювання стану кубіта.
- 1.2.3. Множина станів кубіта. Сфера Блоха.
- 1.2.4. Додаток (алгебра матриць Паулі).

2. Частина 2.

2.1. ЗАРЯДОВИЙ КУБІТ.

- 2.1.1. Кулонівська енергія надпровідного островка.
- 2.1.2. Джозефсонівське тунелювання.
- 2.1.3. Кулонівська блокада. Задача.

2.2. КУБІТ, КЕРОВАНИЙ МАГНІТНИМ ПОТОКОМ.

- 2.2.1. Енергія надпровідного кільця з джозефсонівським контактом в магнітному полі.
- 2.2.2. Модель двоямного потенціалу. Задача.

2.3. ДИНАМІКА КВАНТОВИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ.

- 2.3.1. LC осцилятор.
- 2.3.2. Квантування поля в резонаторі, утвореному трансмісійною лінією.
- 2.3.3. Квантова теорія осциляцій Рабі та неруйнівні вимірювання станів резонатора та дворівневої системи.
- 2.3.4. Узагальнені потоки в квантових електричних колах.

Література

ВСТУП

Надпровідні матеріали знайшли новий і перспективний напрямок практичних застосувань. Мова йде про квантові біти (quantum bits) або кубіти, які є базовими елементами квантових функціональних схем.

Існування суперпозиційних станів у окремих кубітів чи об'єднаних в єдиній когерентній системі створює унікальну можливість знайти розв'язки деяких математичних задач, наприклад, задачі факторизації великих чисел (див. [1,2]) або ж здійснювати симуляції фізичних процесів у складних системах. У другому випадку комп'ютер може виконувати операції в режимі аналогової машини, тобто здійснювати симуляції саме квантових процесів. Дослідження, що стосуються квантових комп'ютерів, значно активізувались після створення алгоритму корекції помилок [3,4], які трапляються в процесі їх роботи. Такий прогрес засвідчив реалістичність програми створення квантового комп'ютера і його здатність розв'язувати існуючі наукові і технічні проблеми. Звичайні комп'ютери неспроможні розв'язувати деякі задачі за практично досяжний час роботи. Наразі існує переконання, що кубіти, створені на основі надпровідних (джозефсонівських) контактів, є найбільш перспективними твердотільними елементами для використання в квантових комп'ютерах.

Квантові обчислення передбачають керування і зчитування станів складних систем, які є об'єднанням багатьох кубітів. Крім того важливо мати можливість контролювати стани окремих кубітів. Якщо окремі атоми (рідбергівські атоми) виконують роль кубітів, тобто дворівневих систем, то на них можна впливати видимим світлом або ж НВЧ випромінюванням. По аналогії, електричні кола з джозефсонівськими контактами, станом яких можна керувати за допомогою електричного струму або напруги, чи мікрохвильовими фотонами, називають штучними атомами. У випадку штучних атомів електричні та магнітні поля керують процесами тунелювання електронів між надпровідним елементом та електродами, близько розташованими біля нього. Вплив цих полів на штучні атоми подібний до ефекту Штарка і Зеємана в природних атомах. Біографія штучних атомів ще дуже коротка, проте вони вже довели свою корисність, зокрема для розуміння парадоксальних властивостей квантового світу. Саме існування квантових станів фази хвильової функції, заряду чи магнітного потоку ще недавно здавались неймовірними, і лише експеримент довів їх реальність.

Різниця між штучними і звичайними атомами полягає лише в силі взаємодії цих двох систем з керуючими полями: взаємодія слабка для атомів і сильна для квантових кіл. Сприятливою є також та обставина, що структура і геометричні характеристики штучних атомів формуються з використанням методів літографії і тому характеризуються високою масштабованістю, можуть набувати наперед заданих параметрів (зокрема, можливе утворення

великих дипольних моментів чи змінюватись ймовірності тунелювання електронів). Типові розміри надпровідних кубітів знаходяться в діапазоні $1 \mu m \sim 100 \mu m$. Такі (майже макроскопічні) розміри полегшують їх об'єднання в єдину когерентну систему, з'являється можливість формувати складні схеми, використовуючи добре розроблені методи мікроелектроніки.

Частина 1

1.1. НАДПРОВІДНІ СИСТЕМИ

Квантовий комп'ютер – це електричне коло з багатьох елементів, в якому протягом значного часу повинна зберігатись когерентність. Час декогеренції перших кубітів (1999 р.) вимірювався наносекундами. До 2012 р. його вдалося збільшити до сотень мікросекунд, що значно розширило перспективність досліджень. Важливими є і розміри окремих частин комп'ютера, які мають бути меншими довжини хвилі випромінювання відповідної дворівневої системи. Їх розміри можна оцінити з наступних міркувань. Якщо використовуються джозефсонівські контакти (Josephson Junctions - JJ), то характерні частоти знаходяться в області мікрохвильового випромінювання. Для прикладу розглянемо випадок, коли частота f ($f = \omega / 2\pi$) дорівнює $2 GHz$. Тоді із співвідношення $f = c / \lambda$, де λ - довжина хвилі, c - швидкість поширення хвилі в колі кубіта, знайдемо, що $\lambda \sim 5 cm$ (для оцінки значення c вважається рівним третині швидкості світла у вакуумі). Як бачимо, якщо один або кілька кубітів знаходяться в об'ємі, лінійні розміри якого менші $1 cm$, то поле випромінювання можна вважати майже постійним. Окремі елементи кіл (конденсатори, індуктивності, тунельні контакти тощо) можна характеризувати дискретними локальними параметрами (lumped circuit model).

Наявність теплових фотонів також негативно впливає на “живучість” кубіта. Тому температура всередині робочого об'єму повинна бути низькою, а саме: значно меншою, ніж $T_\omega = \hbar\omega / k_B$, де \hbar і k_B - сталі Планка і Больцмана. Якщо вважати, що частота f дорівнює $2 GHz$, то значення T_ω буде $\sim 0.1 K$. Щоб уникнути теплових фотонів у колі кубіта, робочу температуру встановлюють на рівні $(0.01 - 0.02) K$.

Очевидно, що при більших частотах можна було б працювати при вищих температурах. Це покращило б умови проведення експерименту. Проте тоді потрібно було б зменшити розміри системи. При цьому можливість керувати системою погіршиться, зменшиться й підсилення вихідного сигналу.

1.1.1. Фаза хвильової функції надпровідника.

При низьких температурах рух позитивно заряджених остовів у метали уповільнюється і тоді стає актуальною електрон-іонна взаємодія (електрон-фононна взаємодія) в системі. Основна її роль зводиться до поляризації ґратки пролітаючим електроном, яка впливає на стани інших електронів. Взаємодія електронів провідності з фононною підсистемою (тобто зі зміщеннями іонів) стає джерелом електрон-електронних кореляцій. Отже, низькоенергетичні фонони є джерелом ефективної притягувальної взаємодії між парами електронів, в результаті якої можуть утворюватись зв'язані стани електронів - куперівські пари. Вони утворюються електронами з протилежно направленими імпульсами ($\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$) і спінами ($\sigma_1 = -\sigma_2$). Кожна пара має нульовий спін і тому для неї не існує заборони Паулі. Будь-яка кількість таких пар може займати лише один стан. Відбувається бозе-конденсація куперівських пар. Оскільки всі частинки знаходяться практично в одному стані, то вони описуються хвильовою функцією від однієї просторової змінної. Загалом, фізична картина нагадує надплинну рідину. Вважається, що надпровідність є надплинністю куперівських пар, кожна з яких має заряд $e = -2|e_0|$, e_0 - заряд електрона.

Хвильова функція надпровідного стану має вигляд

$$\Psi(\vec{r}) = \sqrt{\rho(\vec{r})} e^{i\theta(\vec{r})}, \quad (1)$$

де ρ - густина пар (або ж густина заряду), утвореного парами. Функція (1) задовольняє рівняння Шредінгера:

$$i\hbar\partial_t\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\partial_{\vec{r}} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi(\vec{r}) + e\varphi\Psi(\vec{r}), \quad (2)$$

де m - маса пари ($m \sim 2m_e$), m_e - маса вільного електрона, \vec{A} і φ - векторний і скалярний потенціали електромагнітного поля. Оператор у правій частині, що діє на хвильову функцію, – це гамільтоніан системи \hat{H} .

Оператор швидкості, що використовується для знаходження потоків у надпровідному конденсаті, за означенням дорівнює:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{r}, \hat{H}] = \frac{1}{m} \left(-i\hbar\partial_{\vec{r}} - \frac{e}{c}\vec{A} \right). \quad (3)$$

Для знаходження комутатора в (3) було використане правило Лейбніца:

$$[\hat{a}, \hat{b}\hat{c}] = [\hat{a}, \hat{b}]\hat{c} + \hat{b}[\hat{a}, \hat{c}].$$

Тепер можна записати квантовомеханічне середнє значення струму. З використанням позначень Дірака для хвильових функцій воно має вигляд:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \vec{j} | \Psi \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{r}, H] \rangle = \langle \Psi | \frac{1}{m} \left(-i\hbar \partial_{\vec{r}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) | \Psi \rangle = \\ &= \frac{1}{m} \int d\vec{r} \Psi^*(\vec{r}) \left(-i\hbar \partial_{\vec{r}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \Psi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4)$$

Локальним значенням струму (або густинною струму) можна вважати величину

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\rho}{m} \left(\hbar \partial_{\vec{r}} \theta(\vec{r}) - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right), \quad (5)$$

де вираз у великій круглій дужці, поділений на m , можна вважати швидкістю куперівських пар. Формулу (5) одержано після знаходження в (4) похідної від функції $\Psi(\vec{r})$; до того ж вважається що добуток $\Psi^*(\vec{r})\Psi(\vec{r})$ є густинною заряду в точці \vec{r} . Тут зазначимо, що згідно загальноновизнаної трактовки хвильової функції цей добуток є лише ймовірністю знаходження певної густини заряду в точці \vec{r} . Але в металах, де густина вільних електронів дуже велика ($\sim 10^{22} \text{ cm}^{-3}$), квантові флуктуації густини незначні навіть в невеликих за об'ємом областях, і саме тому, на думку Р. Фейнмана, згаданий добуток можна замінити класичною величиною густини (див. 9-ий том курсу лекцій Р. Фейнмана, які він прочитав 1961-1963 рр. в Каліфорнійському Технологічному Інституті). Важливою є також та обставина, що флуктуації густини електронів супроводжуються сильними кулонівськими полями, які швидко відновлюють рівноважний стан системи. З цієї ж причини ми знехтували в (5) похідною $\partial_t \rho$.

В загальному випадку густина струму (5) повинна задовольняти рівняння неперервності

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0. \quad (6)$$

У стаціонарного стані системи (незалежно від сказаного вище) похідна по часу дорівнює нулеві, і тоді з рівнянь (5) і (6) одержимо:

$$\hbar \Delta \theta(\vec{r}) - \frac{e}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0. \quad (7)$$

Зазвичай в таких задачах використовують кулонівську калібровку для векторного потенціала $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Тоді замість рівняння (7) одержимо

$$\Delta \theta(\vec{r}) = 0. \quad (8)$$

Ця умова виконується скрізь в об'ємі цілого шматка металу (lump element). Значимо, що рівняння (8) задовольняє будь-яка константа C або ж довільна лінійна функція координат $\vec{C}_1 \cdot \vec{r}$. Наявність в розв'язку $\theta(\vec{r})$ постійної

лише змінить нормувальний множник у виразі для хвильової функції (1), проте не змінить густини струму через надпровідник. Значення ж \vec{c}_1 можна вважати рівним нулеві, оскільки в системі відсутній однонаправлений струм. Тоді у правій частині виразу (5) повинен залишитись лише один член:

$$\vec{j}(\vec{r}) = -\frac{e\rho}{mc} \vec{A}(\vec{r}). \quad (9)$$

Подібний вираз для густини струму був запропонований Х. Лондоном і Ф. Лондоном ще в 1935 році.

Підставимо в перше рівняння Максвелла

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (10)$$

значення магнітного поля, виражене через векторний потенціал $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ і знехтуємо похідною по часу від електричної індукції \vec{D} . В результаті одержимо

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\frac{4\pi e\rho}{mc^2} \vec{A}(\vec{r}),$$

де в праву частину ми підставили значення густини струму (9). Ліву ж частину перепишемо у вигляді

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A},$$

де врахована кулонівська калібрівка для \vec{A} . Рівняння для \vec{A} зводиться до

$$\Delta \vec{A} = \lambda^2 \vec{A}(\vec{r}), \quad (11)$$

де $\lambda^2 = \frac{4\pi e\rho}{mc^2}$. З рівняння (11) випливає, що глибина проникнення магнітного поля в надпровідник дорівнює λ^{-1} . Для простоти розглянемо випадок, коли магнітне поле є паралельним до нескінченної плоскої поверхні надпровідника. Нехай A залежить лише від відстані до поверхні x . Тоді відповідне диференціальне рівняння другого порядку для A матиме вигляд:

$$\partial_x^2 A(x) = \lambda^2 A(x)$$

Його розв'язком всередині металу є функція

$A(x) = \text{const} \times e^{-x\lambda}$. Значення постійної в правій частині задається магнітним полем на поверхні. Непроникнення

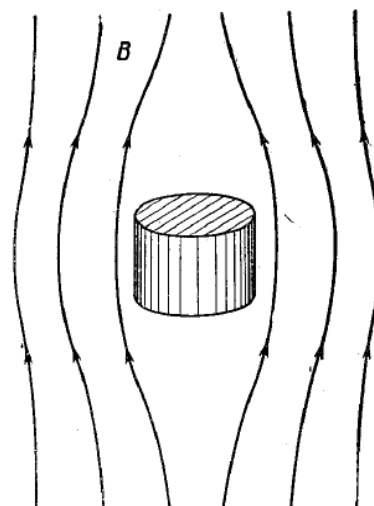


Рис. 1. Показано, як силові лінії магнітної індукції \vec{B} п роникають в метал.

магнітного поля всередину надпровідника називається ефектом Мейснера.

Якщо підставити у вираз для λ^{-1} значення концентрації вільних електронів, що дорівнює $2 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, а масу куперівської пари вважати рівною двом електронним масам, то одержимо $\lambda^{-1} \approx 3 \times 10^{-6} \text{ cm}$. Отже, магнітне поле проникає лише на кілька сотих мікрона всередину надпровідника. Для демонстрації непроникнення магнітного поля використовують надпровідник, виготовлений у вигляді кільця, як показано на рисунку. Спочатку неохолоджене металеве кільце знаходиться в магнітному

полі. Силкові лінії поля є і зовні кільця, і в його об'ємі, і в отворі. Потім кільце охолоджують до температури, нижчої за критичну. Наслідком ефекту Мейснера є витіснення магнітного поля за межі металевого середовища. Це показано на рисунку (b). Тут видно, що силкові лінії не заходять у метал, який уже став надпровідником. Центральна частина магнітного потоку виявляється оточеною надпровідним кільцем. Якщо вимкнути зовнішнє поле, то частина потоку, яка знаходиться всередині кільця, не зникає, а його силкові лінії замикаються самі на себе (див. (c)). Утворюється типова конфігурація магнітного диполя. Намагніченість підтримують циркулюючі поверхневі струми. В ідеальному надпровіднику ці струми не загаяють і такий стан триватиме нескінченно довго.

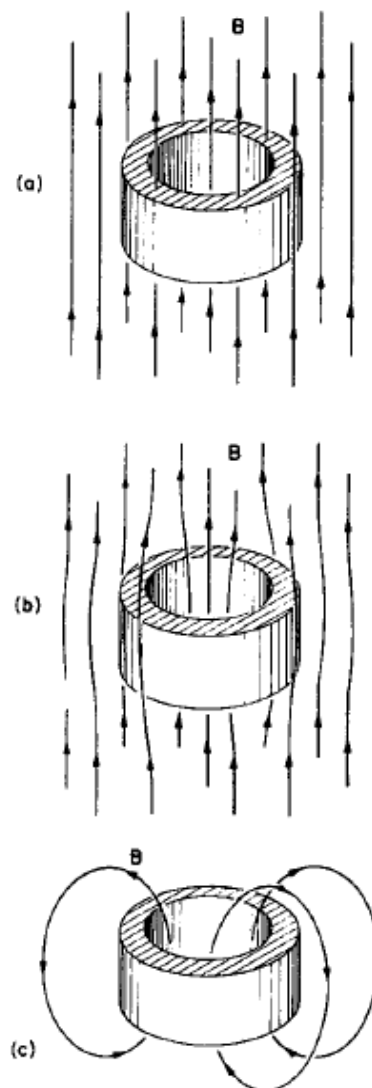


Рис. 2.

Для пояснення явища замороження магнітного потоку Φ всередині надпровідного кільця можна використати рівняння Максвелла. З них одержимо, що зміна з часом значення Φ описується наступним чином:

$$\dot{\varphi} = \int d\vec{s} \cdot \dot{\vec{B}} = -c \int d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = -c \oint d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{r}_l) = 0. \quad (12)$$

З формул (12) видно, що магнітний потік через кільце залишається незмінним при спробі змінити магнітне поле. При переході від другого до третього виразу використане друге рівняння Максвелла. А при переході від третього до четвертого виразу (тобто, перехід від інтегрування по поверхні \vec{S} до інтеграла по контуру \vec{l}) використана теорема Стокса. Контур \vec{l} проходить всередині кільця далеко від його поверхні, де електричне поле \vec{E} відсутнє (див. Рис. 3).

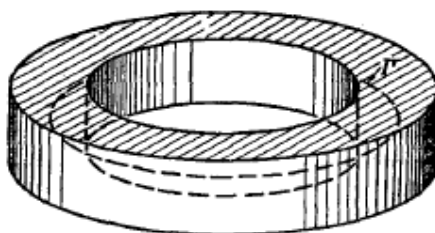


Рис. 3. Контур інтегрування позначено буквою Γ . Він проходить всередині об'єму кільця (вища пунктирна лінія).

Непроникнення магнітного поля всередину надпровідника можна використати для намагнічування немагнітних (але надпровідних) матеріалів. Далі переконаємось, що захоплений кільцем магнітний потік квантується.

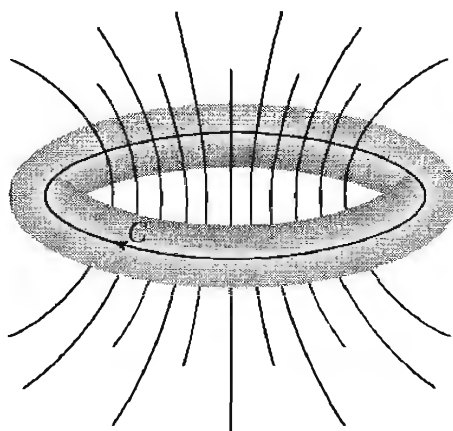


Рис. 4. Конфігурація магнітного потоку через кільце. Показані силові лінії магнітного поля, замкнені надпровідним кільцем.

2.1.2. Квантування магнітного потоку, квант потоку.

Виразимо величину магнітного потоку всередині надпровідного кільця через векторний потенціал:

$$\varphi = \int d\vec{s} \cdot \vec{B} = \int d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = \oint d\vec{l} \cdot \vec{A}(\vec{r}_l). \quad (13)$$

Контур, по якому відбувається інтегрування, проходить так, як показано на **Рис. 3**. Всередині матеріалу на достатній відстані від поверхні густина струму дорівнює нулю. Тоді, використовуючи вираз (6), можна виразити векторний потенціал через градієнт фази:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{c\hbar}{e} \partial_{\vec{r}} \theta(\vec{r}). \quad (14)$$

Отже, магнітний потік дорівнює

$$\varphi = \frac{c\hbar}{e} \oint d\vec{l} \cdot \partial_{\vec{r}} \theta(\vec{r}), \quad (15)$$

де контур охоплює все кільце. Нехай початок контуру інтегрування знаходиться в точці \vec{r}_1 , де значення хвильової функції дорівнює $|\Psi(\vec{r}_1)\rangle = \sqrt{\rho(\vec{r}_1)} e^{i\theta(\vec{r}_1)}$. Під час інтегрування значення фази $\theta(\vec{r})$ змінюється і після проходження по всьому кільцю фаза дорівнюватиме $\theta(\vec{r}_1) + \Delta\theta$. Але, оскільки система знову попадає в початкову точку \vec{r}_1 , то її хвильова функція залишиться незмінною, тобто

$$\sqrt{\rho(\vec{r}_1)} e^{i\theta(\vec{r}_1)} = \sqrt{\rho(\vec{r}_1)} e^{i[\theta(\vec{r}_1) + \Delta\theta]}.$$

Звідси можна зробити висновок, що набута в результаті інтегрування фаза може дорівнювати лише значенням

$$\Delta\theta = 2\pi n, \quad (16)$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тоді з формули (15) одержимо

$$\varphi = \frac{c\hbar}{|e|} 2\pi n \quad \text{або} \quad \varphi = \Phi_0 n, \quad (17)$$

де

$$\Phi_0 = ch/|e| = 2,0678 \times 10^{-7} \text{ гаус} \cdot \text{см}^2 \quad CGS$$

$\Phi_0 = h/|e| = 2,0678 \times 10^{-15} \text{ тесла} \cdot \text{м}^2 \quad SI$. Φ_0 - дискретність фази, яку називають квантом магнітного потоку або флаксоном. З експериментально вимірних значень Φ_0 було знайдене відношення $h/|e|$, з якого був визначили заряд куперівської пари e .

1.1.3. Проходження надпровідного струму через контакт. Рівняння Джозефсона.

Два надпровідники, між якими знаходиться ізолюючий прошарок, утворюють так званий джозефсонівський контакт. Саме нобелівський лауреат Браян Джозефсон опублікував роботу [5], в якій передбачив два незвичайні явища в контактах надпровідних матеріалів.

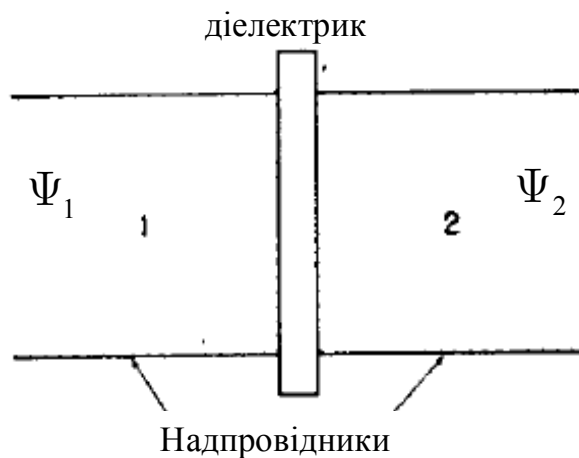


Рис. 5. Два надпровідники, між якими знаходиться діелектричний шар.

Якщо діелектричний шар дуже товстий, то електрони не можуть переміщуватись між частинами 1 і 2. При зменшенні товщини шару електрони можуть тунелювати і з частини 1 в частину 2, і в протилежному напрямку. Стан електронів усієї системи можна охарактеризувати двома хвильовими функціями Ψ_1 і Ψ_2 . Найпростішою є ситуація, коли надпровідники зроблені з одного матеріалу а контакт симетричний. Тоді для хвильових функцій можна написати два зв'язані рівняння Шредінгера:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\Psi_1 &= U_1\Psi_1 + K\Psi_2 \\ i\hbar\partial_t\Psi_2 &= U_2\Psi_2 + K\Psi_1, \end{aligned} \quad (18)$$

де константа K характеризує тунельний контакт. У рівняннях (18) відсутні члени з кінетичною енергією, оскільки було знехтувано імпульсом куперівських пар. Потенціальні енергії U_1 і U_2 залежать від прикладеної до контакту напруги V від зовнішнього джерела. Різниця $U_1 - U_2 = eV$, де $V = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi_{1,2}$ - скалярні потенціали електричного поля. Тоді в рівняннях (18) можна покласти $U_{1,2} = \pm eV/2$, після чого вони набудуть симетричного вигляду:

$$\begin{aligned}
i\hbar \partial_t \Psi_1 &= \frac{e}{2} V \Psi_1 + K \Psi_2 \\
i\hbar \partial_t \Psi_2 &= -\frac{e}{2} V \Psi_2 + K \Psi_1
\end{aligned} \tag{19}$$

Оскільки обидві частини (1,2) знаходяться в надпровідному стані, то їх хвильові функції можна представити у вигляді:

$$\Psi_{1,2}(\vec{r}_{1,2}) = \sqrt{\rho_{1,2}} e^{i\theta(\vec{r}_{1,2})} . \tag{20}$$

Величини $\rho_{1,2}$ і $\theta_{1,2} \equiv \theta(\vec{r}_{1,2})$ є дійсними. Тому, прирівнявши в рівняннях (19) дійсні та уявні частини, одержимо чотири незалежні рівняння:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_1 &= \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta \\
\dot{\rho}_2 &= -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta \\
\dot{\theta}_1 &= -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \delta - \frac{e}{2\hbar} V \\
\dot{\theta}_2 &= -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \delta + \frac{e}{2\hbar} V
\end{aligned} , \tag{21}$$

де $\delta = \theta_2 - \theta_1$. Величини $\dot{\rho}_1$ і $\dot{\rho}_2$ позначають потоки заряду куперівських пар через контакт в протилежних напрямках. Як видно з перших двох рівнянь, ці потоки рівні по величині. Збільшення заряду в частині 1 супроводжується таким же зменшенням заряду в частині 2. Очевидно, що зміна густин $\rho_{1,2}$ свідчить про заряджання обох надпровідників. Проте зміни заряду не відбудеться, якщо електричне коло замкнене, і потік є неперервною величиною. Електричний струм у колі дорівнює

$$J = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta . \tag{22}$$

Густини зарядів у замкненому колі залишаються практично незмінними $\rho_1 = \rho_2$. Тому вираз (22) можна записати у вигляді

$$J = J_c \sin \delta, \quad (24)$$

де $J_c = \frac{2}{\hbar} K |\rho|$ - критичне значення струму, що може протікати через контакт без опору.

Віднімаючи від четвертого рівняння третє, одержимо

$$\dot{\delta} = \frac{e}{\hbar} V. \quad (25)$$

Співвідношення (24) і (25) називають першою і другою формулами Джозефсона. З другої формули можна побачити, що фаза δ змінюється з часом, коли до контакту прикладена напруга. Якщо $V < 0$, тобто потенціал φ_2 більший, ніж φ_1 , то похідна $\dot{\delta}$ буде додатною величиною. (Принципово ситуація не зміниться, коли $V < 0$.)

Якщо $V = \text{const}$, то $\dot{\delta} = \omega$, де ω - частота коливань струму через контакт. У цьому випадку рівність (25) зручно записати у такому вигляді:

$$\hbar\omega = |eV|.$$

Вона означає, що енергія, набута куперівською парою під час тунелювання, дорівнює енергії кванта $\hbar\omega = |eV|$. В електричному колі генерується змінний струм. Випромінювання з відповідною частотою було зареєстроване експериментально. Якщо ж $V = 0$, то в колі існуватиме постійний струм, величина якого може мати будь-яке значення в інтервалі $|J| \leq J_c$. У загальному випадку фаза δ залежить від еволюції напруги і дорівнює

$$\delta = \delta_0 + \frac{e}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V(t'), \quad (26)$$

де δ_0 - значення фази в момент часу t_0 . Тоді перша формула Джозефсона (24) набуде вигляду

$$J = J_c \sin \left(\delta_0 + \frac{e}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V(t') \right). \quad (27)$$

1.1.4. Проходження струму через кільце з двома джозефсонівськими контактами.
(Superconducting Quantum Interference Device - SQID)

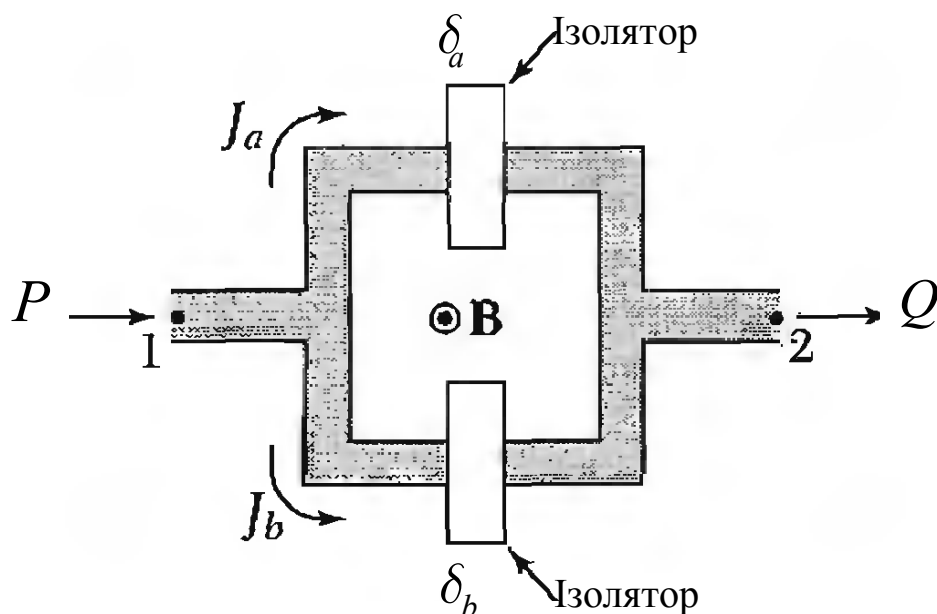


Рис. 6. Схематичне зображення сквіда (SQID). Сірим кольором показані надпровідні елементи кола, що розгалужується.

Струм заходить у коло через контакт P і виходить через контакт Q . Магнітний потік у кільці, зумовлений магнітною індукцією \vec{B} , може істотно змінити умови проходження струму по різних гілках паралельного сполучення провідників. Причиною цього явища є та обставина, що швидкість куперівських пар залежить від величини векторного потенціалу \vec{A} (див. формулу (5)), який може бути істотно різним у різних місцях розгалуженого кола. Повний струм (від P до Q) є сумою $J_a + J_b$, і виявляє інтерференційний характер. Струм залежить від величини магнітного потоку через кільце. На цьому базується практичне використання сквідів.

Чутливість струму до магнітного потоку можна пояснити такими міркуваннями. Струм по верхній частині кола залежить лише від різниці фаз хвильової функції δ_a на джозефсонівському контакті:

$$J_a = J_c \sin \delta_a . \quad (28)$$

Аналогічний вираз для струму по нижній частині (J_b) одержимо з (28) формальною заміною a на b . Повну зміну фази θ_a на шляху від входу P до виходу Q можна знайти, проінтегрувавши по контуру, який проходить всередині верхнього провідника (посередині сірої частини):

$$\Delta\theta_{P \rightarrow Q} = \delta_a + \int_P^Q d\vec{l} \cdot \vec{\nabla} \theta = \delta_a + \frac{e}{\hbar} \int_P^Q d\vec{l} \cdot \vec{A} . \quad (28)$$

Тут використана умова відсутності струму всередині надпровідника

$\vec{\nabla} \theta = \frac{e}{\hbar} \vec{A}$ і окремо виділена стрибкоподібна зміна фази (δ_a) на верхньому

тунельному контакті. Аналогічні формули можна записати і для струму по нижньому провіднику:

$$\Delta\theta_{P \rightarrow Q} = \delta_b + \int_P^Q d\vec{l} \cdot \vec{\nabla} \theta = \delta_b + \frac{e}{\hbar} \int_P^Q d\vec{l} \cdot \vec{A} . \quad (29)$$

Вирази в (28) і (29) істотно відрізняються значеннями δ_a і δ_b , а також тим, що контури інтегрування також різні. Останні схематично можна зобразити у такому вигляді

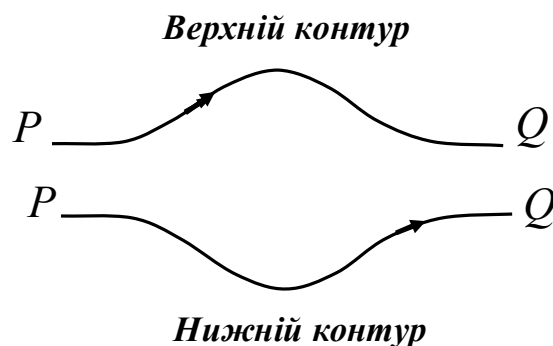


Рис. 7. Окремо показані верхній і нижній контури інтегрування у виразах (28) і (29).

Очевидно, що зміна фази $\Delta\theta_{P \rightarrow Q}$ при переміщенні по контурах від точки P до Q є однаковою в обох випадках, оскільки фаза є однозначною функцією. Тоді, прирівнюючи вирази (28) і (29) і враховуючи, що кінці обох контурів є спільними, одержимо:

$$\delta_b - \delta_a = \frac{|e|}{\hbar} \oint d\vec{l} \cdot \vec{A} . \quad (30)$$

Тут інтегрування здійснюється по об'єднаному контуру у напрямку, показаному стрілкою; також враховано, що інтеграл по верхній вітці після зміни напрямку інтегрування на протилежний також змінить знак. Інтеграл в (30), як показано раніше, дорівнює потоку магнітної індукції φ через кільце

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{A} = \int d\vec{s} \cdot \vec{B} = \varphi. \quad (31)$$

Отже, різниця фаз на контактах визначається магнітним потоком через кільце:

$$\delta_b - \delta_a = 2\pi\varphi / \Phi_0, \quad (32)$$

де, як і раніше, Φ_0 - квант магнітного потоку. Як бачимо, фази δ_a і δ_b не є незалежними величинами, і тому повний струм у колі залежить від їх різниці, а значить, і від магнітного потоку всередині кільця. Вимірюючи струм J , можна одержати інформацію щодо величини потоку. Тому таку схему використовують як магнітометр. Конкретний зв'язок між струмом і потоком одержимо з наступних міркувань.

Нехай $\delta_a = \delta_0 - \pi\varphi / \Phi_0$. Тоді $\delta_b = \delta_0 + \pi\varphi / \Phi_0$. Після таких заміन співвідношення (32) не порушується і тоді повний струм дорівнює

$$\begin{aligned} J &= J_a + J_b = \\ &= J_c \sin \delta_0 \left[\sin(\delta_0 - \pi\varphi / \Phi_0) + \sin(\delta_0 + \pi\varphi / \Phi_0) \right] = 2J_c \sin \delta_0 \cos(\pi\varphi / \Phi_0). \end{aligned}$$

Величина δ_0 невідома. Її можна змінити, приклавши на деякий час до контактів P і Q напругу V (див. формулу (26)), і досягти максимального значення коефіцієнта $\sin \delta_0$ у виразі для J . Це покращить чутливість методу знаходження величини φ з результатів вимірювань струму J .

Отже, струм як функція φ має осциляційну залежність

$$J(\varphi) = J_{\max} \cos(\pi\varphi / \Phi_0), \quad (33)$$

де амплітуда осциляцій J_{\max} не перевищує значення $2J_c |\sin \delta_0|$. Відстань між сусідніми екстремальними значеннями струму $\Delta\varphi$ дорівнює Φ_0 , а самі екстремальні значення $J(\varphi)$ будуть саме там, де задовольняються умови квантування магнітного потоку: $\varphi = n\Phi_0$. Осциляції струму у відповідності з формулою (33) спостерігались експериментально ще в 1964 році [6]. Струм змінить знак, якщо величина магнітного потоку зміниться лише на один квант. Можна збільшити точність вимірювань, збільшивши кількість JJ контактів у колі, зображеному на **Рис. 6**. Тоді частота осциляцій

зросте і можна буде фіксувати ще менші зміни величини потоку (значно менші одного кванта магнітного потоку).

Сквіди використовують не лише як високочутливі магнетометри, але і як підсилювачі слабких сигналів [7]. Передача сигналів у надпровідну петлю може здійснюватись через взаємну індуктивність (mutual inductance) самої петлі та вихідного контура, який розташовують близько до неї. Потенційна область застосувань таких пристроїв включає ядерний магнітний резонанс, ядерний квадрупольний резонанс, вимірювання станів кубітів та дослідження їх динаміки тощо.

1.2. ФАЗОВИЙ КУБІТ, КЕРОВАНИЙ СТРУМОМ. (Current-biased phase qubit)

1.2.1. Гамільтоніан системи.

Далі розглянемо динаміку найпростіших електричних кіл, складовою частиною яких є джозефсонівський контакт. Запишемо рівняння Кірхгофа для електричного кола, зображеного на **Рис. 7**. Струм I , що заходить в це коло, розгалужується і протікає через три паралельні вітки:

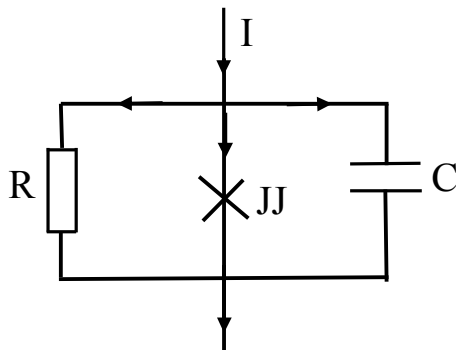


Рис. 8. Електричне коло, в яке входять омичний опір R , джозефсонівський контакт JJ (позначений хрестиком), конденсатор C .

Повний струм є сумою трьох складових:

$$I = \frac{V}{R} + J_c \sin \delta + C \frac{dV}{dt} . \quad (34)$$

Перший член у правій частині – це звичайний струм через омичний опір R до якого прикладена напруга V . Другий – це тунельний струм через джозефсонівський контакт JJ , на якому стрибок фази хвильової функції дорівнює δ . Третій – це струм перезарядки конденсатора C , який дорівнює $\frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}$, де Q позначає заряд конденсатора. Ємність конденсатора C

може бути власною ємністю тунельного контакта JJ або ж додатковим елементом кола. Якщо температура системи достатньо низька, то кількість квазічастинок (тобто електронів, що не об'єдналися в куперівські пари) мала і тоді дисипативним струмом можна знехтувати: $(V/R) \rightarrow 0$. Тоді рівняння Кірхгофа (34) набуває вигляду

$$I = J_c \sin \delta + C \dot{V}. \quad (35)$$

Використовуючи друге рівняння Джозефсона, напругу V можна виразити через похідну від різниці фаз, а саме: $V = (\Phi_0 / 2\pi) \dot{\delta}$. Тоді рівняння (35) зведеться до рівняння з однією невідомою функцією $\delta(t)$:

$$I = J_c \sin \delta + C (\Phi_0 / 2\pi) \ddot{\delta}. \quad (36)$$

Домножимо обидві частини (36) на $\Phi_0 / 2\pi$, після чого воно) набуде вигляду $C (\Phi_0 / 2\pi)^2 \ddot{\delta} + J_c (\Phi_0 / 2\pi) \sin \delta - I (\Phi_0 / 2\pi) = 0$.

Введемо позначення: $m = C (\Phi_0 / 2\pi)^2$; $E_J = J_c (\Phi_0 / 2\pi)$. Тоді рівняння (37) переписеться у вигляді

$$m \ddot{\delta} + E_J \left(\sin \delta - \frac{I}{J_c} \right) = 0. \quad (38)$$

Воно нагадує рівняння Ньютона для частинки з масою m , що рухається в потенціальному полі

$$U(\delta) = -E_J \left(\cos \delta + \frac{I}{J_c} \delta \right), \quad (39)$$

де $U(\delta)$ - "потенціальна енергія". В потенціальному полі U на частинку діє "сила" $\vec{F}(\delta)$ ($\vec{F} = -\partial U / \partial \delta$). Тоді в нових термінах рівняння (38) можна переписати у компактному вигляді:

$$m \ddot{\delta} = \vec{F}(\delta). \quad (40)$$

"Кінетична енергія" частинки дорівнює

$$T(\dot{\delta}) = \frac{m}{2} \dot{\delta}^2. \quad (41)$$

Різниця кінетичної та потенціальної енергій за означенням є функцією Лагранжа системи:

$$L(\dot{\delta}, \delta) = T(\dot{\delta}) - U(\delta). \quad (42)$$

Для квантовомеханічного опису системи потрібно перейти від лагранжевого до гамільтонового формалізму. Для цього спочатку потрібно перейти від “швидкостей” $\dot{\delta}$ до узагальнених імпульсів q , які задаються похідною від лагранжіана:

$$q = \partial L / \partial \dot{\delta} = m \dot{\delta}. \quad (43)$$

Після перетворення Лежандра, яке у випадку лише однієї “частинки” має вигляд

$$H = q\dot{\delta} - L(\dot{\delta}, \delta),$$

одержимо гамільтоніан системи у вигляді

$$H = \frac{q^2}{2m} - E_J \left(\cos \delta + \frac{I}{J_c} \delta \right). \quad (44)$$

Тут використана формула (43). Можна побачити, що гамільтоніан дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергій (тобто енергії системи). Проте функція Гамільтона не завжди збігається з енергією системи.

Використовуючи функцію Гамільтона, можна описувати класичну динаміку системи за допомогою двох рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= -\partial H / \partial \delta \\ \dot{\delta} &= \partial H / \partial q \end{aligned} \right\}, \quad (45)$$

які називають рівняннями Гамільтона або канонічними рівняннями. Фактично, вони замінюють одне рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{\delta}, \delta)}{\partial \dot{\delta}} - \frac{\partial L(\dot{\delta}, \delta)}{\partial \delta} = 0,$$

яке є не що інше, як рівняння Ньютона (40).

Перехід до квантовомеханічного опису здійснюється шляхом заміни фізичних величин H, q, δ на відповідні оператори $\hat{H}, \hat{q}, \hat{\delta}$, де комутатор між двома канонічно спряженими величинами \hat{q} і $\hat{\delta}$ дорівнює

$$[\hat{q}, \hat{\delta}] = \hat{q}\hat{\delta} - \hat{\delta}\hat{q} = -i\hbar. \quad (46)$$

У багатьох випадках зручно використовувати “кординатний” базис, тобто базис, де власними значеннями оператора координати є сама координата:

$$\hat{\delta}|\delta\rangle = \delta|\delta\rangle.$$

В такому базисі оператор \hat{q} дорівнює $-i\hbar\partial / \partial \delta$.

Тепер квантовомеханічний розгляд зводиться до знаходження власних функцій $|\Psi\rangle$ і власних значень E гамільтоніана \hat{H} :

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle,$$

де

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} - E_J \left(\cos \delta + \frac{I}{J_c} \delta \right). \quad (47)$$

1.2.2. Руйнівне вимірювання стану кубіта.

Гамільтоніану (47) відповідає електричне коло, зображене на **Рис. 9(a)**.

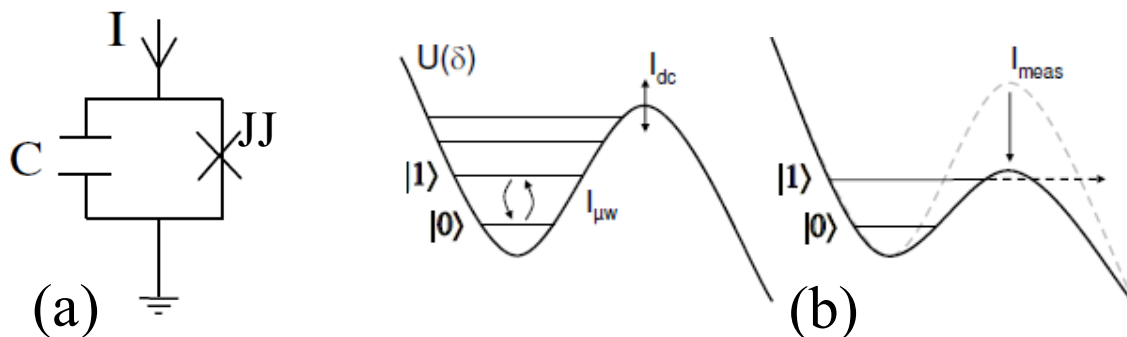


Рис. 9. На частині (a) схема кола з джозефсонівським контактом JJ та конденсатором C. На частині (b) показана потенціальна енергія U як функція δ при двох різних значеннях керуючого струму I.

Положення рівнів залежить від ємності конденсатора C (тобто, від “маси” частинки) та потенціальної енергії U. З формули (39) видно, що форма кривої залежності потенціальної енергії від δ нагадує пральну дошку. На **Рис. 9(b)** показаний лише один фрагмент цього потенціалу. Два найнижчі рівні, позначені символами $|0\rangle$ і $|1\rangle$, утворюють дворівневу систему. При

збільшенні струму від значення I_{dc} (dc - direct current) до I_{meas} (“meas” - measurement) з’являється можливість тунельного переходу через бар’єр (показано стрілкою). Такий перехід з нижнього рівня є малоімовірним. Тому, коли після збільшення струму $I_{dc} \rightarrow I_{meas}$ відбувається тунельний перехід, то можна стверджувати, що з високою ймовірністю система перебувала у верхньому стані $|1\rangle$. Саме в цьому суть ідеї вимірювання стану кубіта таким способом. Після тунелювання система зколапсує і кубіт зруйнується. Це проявиться у виникненні напруги на контакті і виділенні тепла в системі.

Такий метод одержання інформації щодо стану кубіта (вимірювання кубіта) називається руйнівним вимірюванням (demolition measurement). Існують і неруйнівні методи вимірювання (non-demolition measurements).

На **Рис. 10** схематично показана одна з можливих конструкцій тунельного контакту, яка використовується в експериментальних дослідженнях.

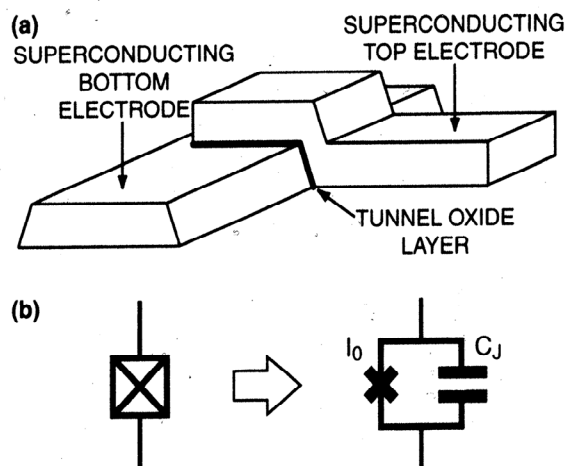


Рис. 10. На частині (а) показаний джозефсонівський тунельний контакт, утворений двома надпровідними тонкими плівками. На частині (b) показано можливі способи позначення цього контакту. На детальній схемі сам контакт показаний хрестиком.

1.2.3. Множина станів кубіта. Сфера Блоха.

Якщо частоти зовнішніх полів, за допомогою яких ми керуємо кубітом, близькі до частоти $\omega_{10} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$, і частота переходу ω_{10} істотно відрізняється від інших характерних частот системи, то остання набуває ознак дворівневої або ж квазіспінової системи. Дворівнева система може перебувати не лише у станах $|0\rangle$ і $|1\rangle$, але і в будь-якому суперпозиційному стані. Хвильова функція буде нормованою на одиницю, якщо вона має такий вигляд

$$\Psi = \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |0\rangle, \quad (48)$$

де θ і ϕ є дійсними величинами. Умова нормування має вигляд: $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$. Якщо замінити θ на $2\pi + \theta$, а ϕ на $2\pi + \phi$, то стан системи не зміниться, оскільки хвильова функція визначена з точністю до множника, модуль якого дорівнює одиниці (тобто з точністю до фазового множника). Використовуючи власні функції $|1\rangle$ і $|0\rangle$ як базові, гамільтоніан (47) можна представити у вигляді діагональної матриці 2×2

$$H = \begin{vmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_0 \end{vmatrix}. \quad (49)$$

Її можна записати як суму двох матриць

$$H = \frac{E_1 + E_0}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{E_1 - E_0}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (50)$$

Перша матриця в правій частині – це одинична матриця, яку можна не враховувати при подальших обчисленнях. Друга відома під назвою матриці

Паулі $\sigma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, діагональні елементи якої вказують на два можливі стани кубіта: 1 та -1 означають збуджений та основний стани. Отже, далі ми вважатимемо, що динаміка кубіта описується гамільтоніаном, відповідна матриця якого має простий вигляд

$$H = \frac{\hbar\omega_{10}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \equiv \frac{\hbar\omega_{10}}{2} \sigma_z, \quad (51)$$

де $\hbar\omega_{10} = E_1 - E_0$. Власні вектори матриці σ_z також можна записати у

матричному вигляді: $|1\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ і $|0\rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$. Легко переконатись, що

$\sigma_z |1\rangle = 1 \times |1\rangle$ і $\sigma_z |0\rangle = -1 \times |0\rangle$, де власні значення ± 1 відповідають двом різним орієнтаціям Z -ої компоненти квазіспіну.

Якщо підставити в рівняння Шредінгера (47) гамільтоніан (51), то воно набуде вигляду

$$i\hbar\partial_t \Psi(t) = \frac{\hbar\omega_{10}}{2} \sigma_z \Psi(t). \quad (52)$$

Його формальним розв'язком є функція

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega_{10}\sigma_z t} |\Psi(0)\rangle, \quad (53)$$

де її значення в початковий момент $t = 0$ задається виразом (48). Оскільки стани $|1\rangle$ і $|0\rangle$ є власними станами оператора σ_z з власними значеннями ± 1 , то

$e^{-\frac{i}{2}\omega_{10}\sigma_z t} |1\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega_{10}t} |1\rangle$ і $e^{-\frac{i}{2}\omega_{10}\sigma_z t} |0\rangle = e^{\frac{i}{2}\omega_{10}t} |0\rangle$ і тоді розв'язок (53), який задовольняє початкові умови (48), набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{2}\omega_{10}t} \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle + e^{\frac{i}{2}\omega_{10}t} e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle = \\
&= e^{-\frac{i}{2}\omega_{10}t} \left[\cos\frac{\theta}{2}|1\rangle + e^{i(\phi+\omega_{10}t)} \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle \right].
\end{aligned} \tag{54}$$

Як бачимо, у хвильовій функції (54) величина кута ϕ збільшилася протягом часу t до значення $\phi + \omega_{10}t$. Множник $e^{-\frac{i}{2}\omega_{10}t}$ перед квадратною дужкою в (54) принципового значення не має, оскільки, як згадувалось раніше, хвильова функція визначається з точністю до фазового множника. Збільшення ж кута ϕ на величину ωt означає зміну хвильової функції $|\Psi\rangle$. Для наочності корисно проілюструвати еволюцію стану кубіта за допомогою так званої сфери Блоха.

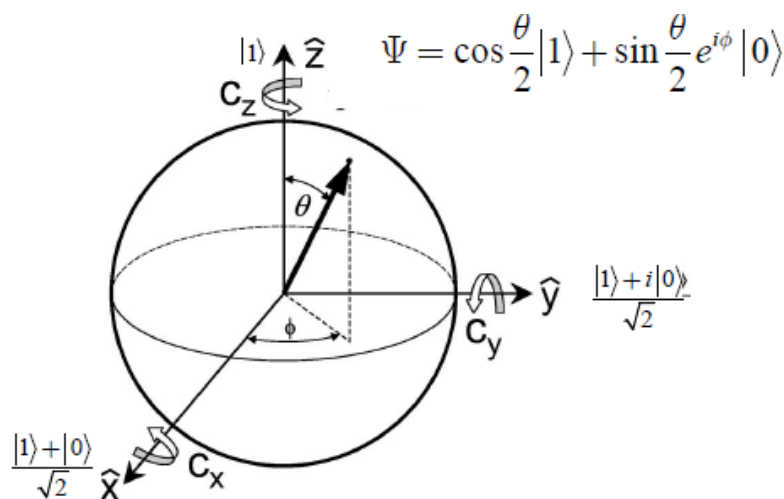


Рис. 11. На рисунку положення жирної стрілки, проведеної з центра сфери Блоха до її поверхні, визначається двома кутами θ і ϕ . З явного виразу для хвильової функції Ψ видно, що саме ці кути задають її значення.

Коли $\theta = 0$, то кубіт знаходиться в збудженому стані $|1\rangle$; коли ж

$\theta = \pi/2$, $\phi = 0$, кубіт знаходиться в суперпозиційному стані $\frac{|1\rangle+|0\rangle}{\sqrt{2}}$;

інший суперпозиційний стан $\frac{|1\rangle+i|0\rangle}{\sqrt{2}}$ буде, коли $\theta = \pi/2$, $\phi = \pi/2$.

Кожна точка поверхні сфери (як і кубіта) однозначно задається двома величинами θ і ϕ . Зміни стану кубіта з часом відбуваються синхронно з

переміщенням цієї точки по поверхні. У наведеному вище прикладі дія оператора $e^{-\frac{i}{2}\omega_{10}\sigma_z t}$ на квантовий стан $\Psi(\theta, \phi)$ призводить до повороту вектора Блоха на кут $\omega_{10}t$ навколо осі z (див. також **Додаток**).

Азимутальний кут лінійно зростає з часом і тому можна говорити, що кубіт обертається навколо осі z з кутовою швидкістю ω_{10} . В загальному випадку ця точка може рухатись хаотично, коли в електричному колі відбуваються флуктуаційні (шумові) зміни струму. Проте це можуть бути і цілеспрямовані зміни струму з метою впливу (керування) на стан кубіта.

Щоб проілюструвати сказане, розглянемо ситуацію, коли крім постійного струму, який будемо позначати символом I_{dc} , в електричному колі існує ще й інший (випадковий) невеликий струм $\Delta I(t)$. Отже, повний струм, що надходить у коло, дорівнює $I(t) = I_{dc} + \Delta I(t)$, де додатковий струм задамо виразом

$$\Delta I(t) = I_f(t) + I_c(t) \cos \omega_{10}t + I_s(t) \sin \omega_{10}t. \quad (55)$$

Вважаємо, що частота переходу між першими двома рівнями незбуреного гамільтоніана (47) значно перевищує характерні частоти зміни дійсних функцій $I_f(t)$, $I_c(t)$ та $I_s(t)$. (Наш аналіз в значній мірі базується на роботі [8]). Із структури гамільтоніана (47) можна побачити, що тепер в ньому з'явиться додатковий член ΔH , пропорціональний $\Delta I(t)$:

$$\Delta H = -E_J \frac{\Delta I(t)}{I_{dc}} \delta. \quad (56)$$

Отже, повний гамільтоніан дорівнює

$$H = \frac{\hbar\omega_{10}}{2} \sigma_z - E_J \frac{\Delta I(t)}{I_{dc}} \delta \equiv H_0 + \Delta H, \quad (57)$$

Відповідно зміниться і рівняння Шредінгера:

$$i\hbar\partial_t \Psi(t) = (H_0 + \Delta H) \Psi(t). \quad (58)$$

Його розв'язок будемо шукати у вигляді

$$\Psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \Phi(t), \quad (59)$$

де замість невідомої функції $\Psi(t)$ тепер з'явилась інша функція, $\Phi(t)$. Після підстановки (59) в рівняння (58) візьмемо похідну в лівій частині і,

помноживши зліва обидві частини (58) на оператор $e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}$, одержимо рівняння для $\varphi(t)$:

$$i\hbar\partial_t\Phi(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}\Delta H e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}\Phi(t), \quad (60)$$

де значення ΔH задається виразом (56), а $H_0 = \frac{\hbar\omega_{10}}{2}\sigma_z$. Новий оператор

$e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}\Delta H e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} \equiv \Delta\tilde{H}$, що діє на функцію $\Phi(t)$, лінійно залежить від фази δ :

$$\langle\alpha|\Delta\tilde{H}|\beta\rangle = -E_J\frac{\Delta I(t)}{I_{dc}}\langle\alpha|e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}\delta e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}|\beta\rangle. \quad (61)$$

Тут α і β нумерують квантові рівні і можуть набувати лише значень 0 і 1. Легко переконатись, що

$$\langle 1|e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}\delta e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}|1\rangle = \langle 1|\delta|1\rangle, \quad (62)$$

де враховано, що стан $|1\rangle$ є власним станом оператора H_0 з власним значенням $\hbar\omega_{10}/2$. Таким же чином легко одержимо

$$\langle 0|e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}\delta e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}|0\rangle = \langle 0|\delta|0\rangle. \quad (63)$$

Недіагональні матричні елементи є швидкоосцилюючими функціями часу t і дорівнюють

$$\langle 1|e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}\delta e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}|0\rangle = \langle 1|\delta|0\rangle e^{i\omega_{10}t}, \quad (64)$$

$$\langle 0|e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}\delta e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}|1\rangle = \langle 0|\delta|1\rangle e^{-i\omega_{10}t}. \quad (65)$$

Як бачимо, оператор координати δ в попередньому базисі ($|1\rangle, |0\rangle$) має всього чотири матричні елементи, використовуючи які гамільтоніан $\Delta\tilde{H}$ можна записати у матричному вигляді:

$$\Delta\tilde{H} = -E_J\frac{\Delta I(t)}{I_{dc}}\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{10}e^{i\omega_{10}t} \\ \delta_{01}e^{-i\omega_{10}t} & \delta_{00} \end{vmatrix}, \quad (66)$$

де введені коротші позначення $\langle\alpha|\delta|\beta\rangle \equiv \delta_{\alpha\beta}$. Матрицю в правій частині (66) можна представити у вигляді суми двох матриць

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{10}e^{i\omega_{10}t} \\ \delta_{01}e^{-i\omega_{10}t} & \delta_{00} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & 0 \\ 0 & \delta_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \delta_{10}e^{i\omega_{10}t} \\ \delta_{01}e^{-i\omega_{10}t} & 0 \end{vmatrix}. \quad (67)$$

Першу матрицю в правій частині (67) також можна записати у вигляді суми

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & 0 \\ 0 & \delta_{00} \end{vmatrix} = \frac{\delta_{11} + \delta_{00}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{\delta_{11} - \delta_{00}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{\delta_{11} + \delta_{00}}{2} I + \frac{\delta_{11} - \delta_{00}}{2} \sigma_z, \quad (68)$$

де I означає одиничну матрицю, яку ми, як і при одержанні формули (51), не будемо брати до уваги.

У другій матриці в (67) ми поклали $\delta_{10} = \delta_{01}$, після чого виразили її через $\sigma_{x,y}$ - матриці Паулі:

$$\begin{vmatrix} 0 & \delta_{10} e^{i\omega_{10}t} \\ \delta_{01} e^{-i\omega_{10}t} & 0 \end{vmatrix} = \delta_{10} (\sigma_x \cos \omega_{10}t - \sigma_y \sin \omega_{10}t),$$

де $\sigma_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\sigma_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}$. Після цього $\Delta\tilde{H}$ набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{H} &= -\frac{E_J}{I_{dc}} [I_{lf}(t) + I_c(t) \cos \omega_{10}t + I_s(t) \sin \omega_{10}t] \times \\ &\times \left[\sigma_z \frac{\delta_{11} - \delta_{00}}{2} + \sigma_x \delta_{10} \cos \omega_{10}t - \sigma_y \delta_{10} \sin \omega_{10}t \right] \approx \\ &\approx -\frac{\Phi_0}{4\pi} (\sigma_z I_{lf}(t)(\delta_{11} - \delta_{00}) + \sigma_x I_c(t)\delta_{10} - \sigma_y I_s(t)\delta_{10}) \end{aligned} \quad (69)$$

Після того, як ми перемножили вирази в квадратних дужках, були залишені лише доданки, що повільно змінюються з часом. Отже, були знехтувані швидкозмінні доданки, в які входили функції

$\cos \omega_{10}t$, $\sin \omega_{10}t$, $\cos \omega_{10}t \times \sin \omega_{10}t$, а функції $\cos^2 \omega_{10}t$ і $\sin^2 \omega_{10}t$

замінені на $1/2$. Ця процедура фактично означає усереднення по швидкозмінних величинах, яке є не що інше як відоме наближення хвиль, що обертаються (the rotating-wave approximation). Таке наближення часто використовується у квантовій оптиці.

Запишемо вираз (69) у вигляді

$$\Delta\tilde{H} = \vec{\sigma} \cdot \vec{c}(t), \quad (70)$$

де вектор $\vec{c}(t)$ має три декартові координати :

$$\vec{c}(t) = -\frac{\Phi_0}{4\pi} \left\{ I_c(t)\delta_{10}, -I_s(t)\delta_{10}, I_{lf}(t)(\delta_{11} - \delta_{00}) \right\}. \quad (71)$$

Якщо знехтувати залежністю струмів I_c, I_s, I_{lf} від часу, то розв'язок рівняння (60) матиме вигляд

$$\Phi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta\tilde{H}t} \Phi(0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{c}\cdot\vec{\sigma}t} \Phi(0). \quad (72)$$

Цей розв'язок має схожість з розв'язком (53). Різниця лише в тому, що замість матриці Паулі σ_z в (72) знаходиться проекція повного вектора квазіспіна $\vec{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ на напрямок \vec{c} , а замість множника $\omega_{10}t$ стоїть величина $2|\vec{c}|t/\hbar$. Не обмежуючи загальний характер теорії, вважатимемо напрямок \vec{c} новою віссю Z . Тоді в новій системі відліку вектор Блоха за час t повернеться на кут $2|\vec{c}|t/\hbar$ навколо осі \vec{c} .

Якщо у виразі (71) $I_c = I_s = 0, I_{lf} \neq 0$, то обертання відбуватиметься лише навколо осі Z (на **Рис. 11** змінюватиметься лише кут ϕ). У випадку шумових струмів відбуватиметься хаотизація фази ϕ , в результаті чого втрачатиметься когерентність кубіта. Якщо ж відмінна від нуля лише компонента I_c , то обертання вектора Блоха відбуватиметься навколо осі X або ж навколо осі Y , якщо лише $I_y \neq 0$. У двох останніх випадках відбудеться хаотизація кута θ , що зумовить релаксацію кубіта до рівноважного стану, який може нав'язуватись шумовим резервуаром (термостатом). В усіх трьох випадках швидкість обертання пропорційна величині відповідного струму. Важливим є те, що зовнішніми струмами можна змінювати положення вектора Блоха, тобто керувати станом кубіта. Зазначимо, що не всі доданки у виразі (55) для $\Delta I(t)$ рівнозначні. Коефіцієнтами біля I_c та I_s є швидкоосцилюючі функції, які й забезпечують релаксацію дворівневих систем до рівноважного стану. І навпаки: $I_{lf}(t)$ є “повільною” функцією, яка лише здійснює поворот вектора стану навколо осі Z , не змінюючи модуль амплітуди стану кубіта.

Потрібне застереження стосовно області використання розв'язку (72). Він справедливий, коли величини I_c, I_s, I_{lf} не залежать від часу (див. умову після формули (71)). Ним можна користуватись і тоді, коли час t малий, і тому квадратичними по часу членами розв'язку можна знехтувати. Строгий розв'язок, в якому врахована некомутативність матриць Паулі, є значно складнішим. Він має такий вигляд

$$\varphi(t) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \Delta\tilde{H}(t')} \varphi(0). \quad (73)$$

Тут оператор \hat{T} означає процедуру впорядкування по часу функції, що стоїть після нього. Якщо в $\Delta\tilde{H}$ входить лише одна якась компонента вектора $\vec{\sigma}$, то впорядкування по часу не потрібне, проте інтегрування по часу в експоненті залишиться.

Описану вище можливість зміни стану кубіта можна використати для створення кубітів з наперед заданим станом. Так, наприклад, якщо охолодити систему до дуже низької температури, і коли кубіт повністю релаксує до нижнього рівня $|0\rangle$ ($\theta = \pi$), то під дією струму $I_c \cos \omega_{10} t$ він почне збільшувати свою енергію і зрештою може виявитись у стані з наперед заданою амплітудою, де $\theta < \pi$. Якщо кубіт перейде в збуджений стан $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$, то відповідний імпульс електромагнітного поля називають π -імпульсом. Якщо ж відбувається перехід з рівня $|0\rangle$ у якийсь суперпозиційний стан з енергією, що дорівнює $\hbar\omega_{10}/2$, то такий імпульс називають $\pi/2$ -імпульсом. Коли початковий стан є суперпозиційним, то подальша еволюція кубіта залежить від початкової фази зовнішнього поля. Якщо ця фаза невідома, то про поведінку системи часто говорять як про квантову невизначеність еволюцію стану. Проте у цьому випадку краще говорити про невизначеність початкового стану всієї вимірювальної системи “кубіт+детектор”.

Отже, ми описали процес входження флуктуаційних або керуючих струмів у квантове електричне коло і з'ясували їхній вплив на струмовий фазовий кубіт.

1.2.4. Додаток (алгебра матриць Паулі).

Три матриці Паулі мають вигляд:

$$\sigma_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вони відповідають самоспряженим операторам

$$\sigma_x = (\sigma_x)^+, \quad \sigma_y = (\sigma_y)^+, \quad \sigma_z = (\sigma_z)^+.$$

Використовуючи правила добутку матриць, знаходяться співвідношення:

$$\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z, \quad \sigma_y \sigma_z = i\sigma_x, \quad \sigma_z \sigma_x = i\sigma_y.$$

Комутаційні співвідношення для трьох матриць $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = i2\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = i2\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = i2\sigma_y.$$

Два власні вектори матриці σ_z задовольняють умови:

$$\sigma_z \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_z \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Часто використовують лінійні комбінації матриць σ_x і σ_y , які мають вигляд

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матриці σ_{\pm} переводять власні стани з одного в інший

$$\sigma_+ \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_- \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

або знищують їх:

$$\sigma_+ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \sigma_- \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Матриці σ_{\pm} (на відміну від матриць $\sigma_{x,y,z}$) не є самоспряженими

($\sigma_{\pm} \neq (\sigma_{\pm})^+$). Для них виконуються співвідношення:

$$\sigma_- \sigma_+ = \frac{1}{2}(1 - \sigma_z), \quad \sigma_+ \sigma_- = \frac{1}{2}(1 + \sigma_z)$$

$$\sigma_+ \sigma_z = -\sigma_z \sigma_+ = -\sigma_+, \quad \sigma_- \sigma_z = -\sigma_z \sigma_- = \sigma_-.$$

Оператор повороту на кут φ вектора стану кубіта навколо осі \vec{n} можна записати у вигляді:

$$R_{\vec{n}}(\varphi) = e^{-i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \varphi / 2} = \cos(\varphi / 2) - i \sin(\varphi / 2) \vec{n} \cdot \vec{\sigma},$$

де \vec{n} - одиничний вектор.

Порівнюючи оператор $R_{\vec{n}}(\varphi)$ з оператором, що входить у вираз (53), $e^{-\frac{i}{2}\omega_{10}\sigma_z t}$, і який повернув вектор стану на кут $\omega_{10}t$, можна зробити висновок, що у цьому конкретному випадку параметр φ дорівнює $\omega_{10}t$.