

Частина 2

2.1. Зарядовий кубіт (Cooper Pair Box)

2.1.1. Кулонівська енергія надпровідного островка.

Далеко не всі дворівневі системи можна використовувати як кубіти для квантових комп'ютерів. З першої частини лекцій ми вже переконались, що існують істотні обмеження і на робочі частоти, і на температури. Існує і необхідність ізоляції від “зовнішнього світу”. Зарядові кубіти були серед найперших надпровідних пристроїв, які продемонстрували квантову когерентність, контрольованість їхнього стану прикладеною напругою, осциляційні характеристики. Цей тип кубітів з'явився ще в 90-их роках минулого сторіччя. Далі ми розглянемо детальніше зарядовий кубіт. На **Рис. 1** схематично показана його конструкція і відповідне електричне коло.

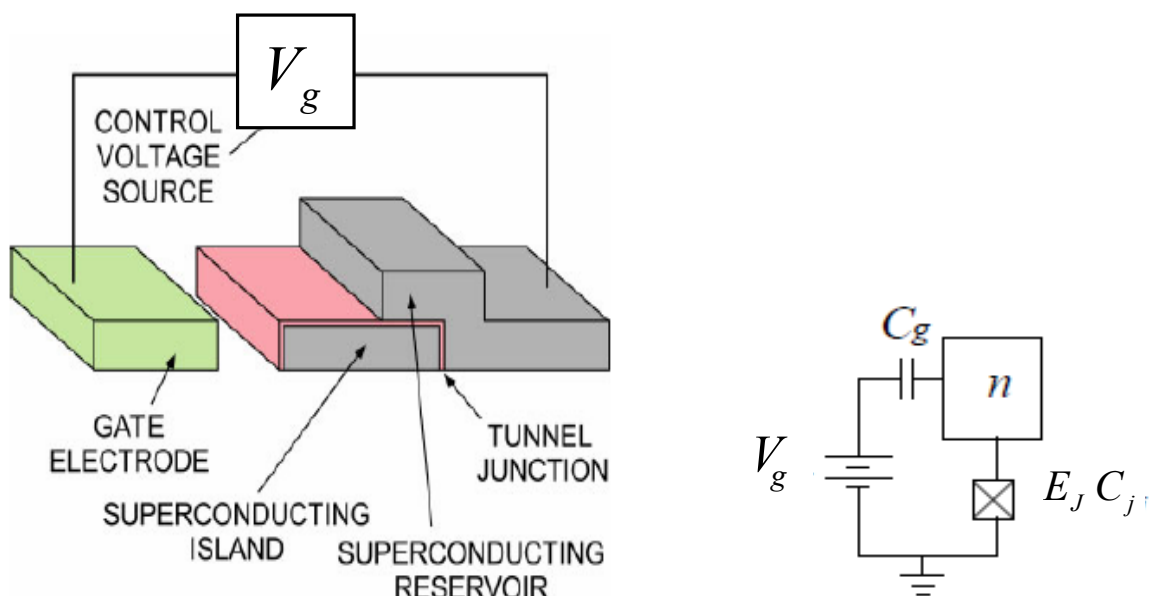


Рис. 1. Зліва показано розташування окремих елементів зарядового кубіта: внизу – надпровідний островок, відділений від масивного провідника джозефсонівським контактом (подвійна лінія); стороннім джерелом напруги V_g можна змінювати кількість куперівських пар в островку (це відбувається за посередництва керуючого електрода (gate electrode)).

Справа показана схема електричного кола: ємність C_g утворюється островком (більший квадрат) та керуючим електродом; маленький квадрат означає джозефсонівський контакт (показаний відділеним від островка) з енергією E_J та невеликою електричною ємністю C_j .

На **Рис. 2** показаний реальний вигляд джозефсонівського контакта. Зображення одержане методом скануючої електронної мікроскопії (SEM).

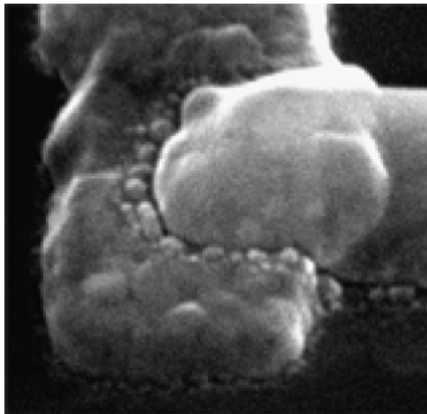


Рис. 2. Джозефсонівський контакт. Товщина тунельного бар'єра ~ 1 nm. При формуванні контакту утворювались гранули (їх видно на рисунку), що погіршило якість зображення.

Кількість куперівських пар на островку визначається зарядами двох конденсаторів. Перший з них утворений лівим електродом та островком і має ємність C_g . Другий утворений ємністю джозефсонівського контакта C_j . Позначимо кількість надлишкових пар островка буквою n . Тоді надлишковий заряд островка дорівнюватиме

$$en = C_g(V - V_g) + C_jV, \quad (1)$$

де, як і раніше, $e = -2|e_0|$, а права частина означає, що заряд конденсатора дорівнює добутку його ємності на різницю потенціалів на його обкладинках. З рівняння балансу (1) виразимо напругу на джозефсонівському контакті V через кількість надлишкових куперівських пар островка:

$$V(n) = \frac{C_g V_g + en}{C_\Sigma}, \quad (2)$$

де $C_\Sigma = C_g + C_j$ - сумарна ємність островка. Енергія конденсатора, ємність якого C_Σ , а напруга на ньому V , дорівнює

$$E_c(n) = \frac{1}{2} C_\Sigma V^2(n) = 4E_{cj} (n - n_g)^2, \quad (3)$$

де $n_g = \frac{C_g V_g}{|e|}$ - контролюючий параметр, а $E_{cj} = \frac{e^2}{8C_\Sigma}$. З останнього виразу видно, що чим менша сумарна ємність островка, тим більшим є значення енергії E_{cj} і більша чутливість до надлишкової концентрації куперівських пар в островку. Саме ця обставина змушує працювати з нанометровими об'єктами.

Перехід до квантовомеханічного опису здійснюється шляхом заміни фізичної величини - кількості куперівських пар n , на оператор \hat{n} . Отже, частина гамільтоніану, яка враховує кулонівську енергію островка, має вигляд

$$H_c(\hat{n}) = \frac{1}{2} C_\Sigma V^2 (\hat{n}) = 4E_{cj} (\hat{n} - n_g)^2. \quad (4)$$

Оператор кількості частинок \hat{n} має власні функції $|n\rangle$, які описують стан островка з n надлишковими куперівськими парами. Відповідне рівняння для власних функцій має вигляд

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (5)$$

розв'язки якого можна використати для того, щоб записати оператор кількості частинок у вигляді

$$\hat{n} = \sum_n n |n\rangle \langle n|. \quad (6)$$

Тут використані позначення Дірака для хвильових функцій. У тому, що права частина (6) тотожно дорівнює лівій, можна переконатись, записавши значення будь-яких [матричних елементів для обох частин виразу (6)]. Для лівої частини це буде

$$\langle n_1 | \hat{n} | n_2 \rangle = n_2 \langle n_1 | n_2 \rangle = n_1 \delta_{n_1, n_2}; \quad (7)$$

для правої – такий же результат:

$$\langle n_1 | \sum_n n |n\rangle \langle n | n_2 \rangle = n_2 \langle n_1 | n_2 \rangle = n_1 \delta_{n_1, n_2}. \quad (8)$$

Тут використана умова ортогональності та нормованості власних функцій оператора \hat{n} :

$$\langle n_1 | n_2 \rangle = \delta_{n_1, n_2}. \quad (9)$$

Якщо всі матричні елементи обох частин (6) однакові, то ліва і права частини (6) тотожно рівні.

2.1.2. Джозефсонівське тунелювання.

Тунельний гамільтоніан для куперівських пар \hat{h}_j записують у вигляді

$$\hat{h}_j = -\frac{E_J}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|). \quad (10)$$

З його явного вигляду видно, що права частина (10) описує процеси зі зміною кількості куперівських пар на островку. Переходи окремих пар відбуваються незалежно. Фізичний зміст константи E_J з'ясується з подальшого розгляду. Але вже зараз можна стверджувати, що права частина (10) повинна виражатись через різницю фаз хвильових функцій δ по різні боки джозефсонівського контакту, введеною в першій частині курсу. Причиною цього є те, що механізм тунелювання в обох випадках один і той же. Отже, фізичні величини, що описують такі переходи, також повинні бути однаковими.

Щоб переконатись у сказаному, введемо нові базисні функції за допомогою таких співвідношень:

$$|\delta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\delta} |n\rangle. \quad (11)$$

Очевидно, що тим значенням δ , що відрізняються на ціле число 2π , відповідає одна і та ж функція $|\delta\rangle$, тому можливі значення δ можна обмежити інтервалом $[0, 2\pi]$. Різні значення δ можуть змінюватись неперервним чином.

Помножимо ліву і праву частини (11) на $e^{-in'\delta} / 2\pi$ та проінтегруємо по δ від нуля до 2π . В результаті одержимо

$$|n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\delta e^{-in'\delta} |\delta\rangle. \quad (12)$$

Таке перетворення є оберненим до прямого перетворенням Фур'є (11).

Для хвильових функцій $|\delta\rangle$ одержимо співвідношення, подібне до (9):

$$\langle \delta_1 | \delta_2 \rangle = 2\pi \delta(\delta_1 - \delta_2). \quad (13)$$

При одержанні (13) використана відома формула

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\delta_1} = 2\pi \delta(\delta_1), \quad (14)$$

яка є розкладом функції $2\pi\delta(\delta_1)$, визначеної в межах інтервалу $[0, 2\pi]$, в нескінченний ряд Фур'є. З неї видно, що всі амплітуди розкладу однакові і дорівнюють 1. Права і ліва частина дорівнюють нескінченності в точці $\delta_1=0$. Матричні елементи якогось оператора \hat{L} можна одержати, використовуючи як базис хвильові функції $|\delta\rangle$. Це досягається представленням оператора \hat{L} у такому вигляді:

$$\hat{L} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint d\delta_1 d\delta_2 \langle \delta_1 | \hat{L} | \delta_2 \rangle | \delta_1 \rangle \langle \delta_2 |. \quad (15)$$

Інтегрування в (15) і в наступних виразах відбувається в інтервалах $[0, 2\pi]$. В тому, що оператори в правій і лівій частинах тотожно рівні, можна переконатись, знайшовши їх матричні елементи:

$$\begin{aligned} \langle \delta'_1 | \hat{L} | \delta'_2 \rangle &= \iint \frac{d\delta_1 d\delta_2}{(2\pi)^2} \langle \delta'_1 | (\langle \delta_1 | \hat{L} | \delta_2 \rangle | \delta_1 \rangle \langle \delta_2 |) | \delta'_2 \rangle = \\ &= \iint \frac{d\delta_1 d\delta_2}{(2\pi)^2} \langle \delta_1 | \delta'_1 \rangle \langle \delta_2 | \delta'_2 \rangle \langle \delta_1 | \hat{L} | \delta_2 \rangle = \\ &= \iint d\delta_1 d\delta_2 \delta(\delta_1 - \delta'_1) \delta(\delta_2 - \delta'_2) \langle \delta_1 | \hat{L} | \delta_2 \rangle = \langle \delta'_1 | \hat{L} | \delta'_2 \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Множина станів $|\delta_i\rangle$ є власними станами якогось оператора фізичної величини $\hat{\delta}$ (оператора фази):

$$\hat{\delta} |\delta_i\rangle = \delta_i |\delta_i\rangle. \quad (17)$$

Якщо \hat{L} є функцією оператора фази $\hat{L} = L(\hat{\delta})$, то з виразу (15) одержимо

$$L(\hat{\delta}) = \iint \frac{d\delta_1 d\delta_2}{(2\pi)^2} \langle \delta_1 | L(\hat{\delta}) | \delta_2 \rangle | \delta_1 \rangle \langle \delta_2 | = \frac{1}{2\pi} \int d\delta L(\delta) |\delta\rangle \langle \delta|. \quad (18)$$

У найпростішому випадку $L(\hat{\delta}) = \hat{I}$ з виразу (18) одержимо для \hat{I} (одиничного оператора) таке представлення:

$$\hat{I} = \frac{1}{2\pi} \int d\delta |\delta\rangle \langle \delta|, \quad (19)$$

яке можна вважати представленням одиничного оператора в неперервному базисі власних функцій оператора $\hat{\delta}$. Подібні представлення часто використовуються в квантовій оптиці.

В іншому простому випадку $L(\hat{\delta}) = \hat{\delta}$ знайдемо, що оператор фази має вигляд

$$\hat{\delta} = \frac{1}{2\pi} \int d\delta \delta |\delta\rangle \langle \delta|, \quad (20)$$

який має схожість з оператором кількості куперівських пар (6).

Оператор \hat{L} можна записати і в базисі хвильових функцій $|n\rangle$. Він має вигляд, аналогічний виразу (15):

$$\hat{L} = \sum_{n,n'} \langle n | \hat{L} | n' \rangle |n\rangle \langle n'|. \quad (21)$$

Доведення таке ж, як і формули (15).

Далі виразимо суму в правій частині (10) через оператори $|\delta_i\rangle \langle \delta_j|$. Вона має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \iint \frac{d\delta_1 d\delta_2}{(2\pi)^2} |\delta_1\rangle \langle \delta_2| \times \\ &\times \left[e^{-i[n\delta_1 - (n+1)\delta_2]} + e^{-i[(n+1)\delta_1 - n\delta_2]} \right] = 2 \int \frac{d\delta_1}{2\pi} |\delta_1\rangle \langle \delta_1| \cos \delta_1 = 2 \cos \hat{\delta}, \end{aligned} \quad (22)$$

де знову використані формули (14) і (15). Підставляючи (22) у вираз (10), одержимо

$$\hat{h}_j = -E_J \cos \hat{\delta}. \quad (23)$$

Порівнюючи (23) з виразом для тунельного гамільтоніана, одержаного в першій частині лекцій, можна зробити висновок, що δ - це і є різниця фаз хвильової функції на джозефсонівському контакті; параметр E_J , як і

раніше, дорівнює $\frac{\Phi_0}{2\pi} I_c$. Повний гамільтоніан для зарядового кубіта, електрична схема якого зображена на рис. 1, має вигляд:

$$H = 4E_c (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\delta}. \quad (24)$$

У праву частину (24) входять два різні оператори \hat{n} і $\hat{\delta}$. Покажемо, що коли комутатор $[\hat{n}, \hat{\delta}] = -i$, то, використовуючи гамільтоніан (24), ми одержимо перше рівняння Джозефсона, яке описує проходження струму I_{jj} через тунельний контакт і яке було одержане нами в першій частині.

Вираз для тунельного струму I_{jj} можна записати у вигляді

$$I_{jj} = e \frac{\partial \hat{n}}{\partial t}. \quad (25)$$

Похідна від гейзенбергівського оператора \hat{n} по часу дорівнює

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{n}, H] = \frac{i}{\hbar} E_J [\hat{n}, \cos \hat{\delta}]. \quad (26)$$

Останній комутатор у правій частині (26) можна представити у вигляді

$$[\hat{n}, \cos \hat{\delta}] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\hat{n}, \frac{(i\hat{\delta})^k + (-i\hat{\delta})^k}{k!} \right], \quad (27)$$

де $\cos \hat{\delta}$ записаний у вигляді нескінченного ряду. Знаходження комутатора

$[\hat{n}, \hat{\delta}^k]$ спрощується, якщо застосувати правило Лейбніца

$$[\hat{n}, \hat{\delta}^k] = [\hat{n}, \hat{\delta}] \hat{\delta}^{k-1} + \hat{\delta} [\hat{n}, \hat{\delta}^{k-1}] = -i\hat{\delta}^{k-1} + \hat{\delta} [\hat{n}, \hat{\delta}^{k-1}] = \dots = -ik\hat{\delta}^{k-1},$$

яке ми використали тут k разів. Після підстановки останнього виразу в (27) знайдемо, що

$$[\hat{n}, \cos \hat{\delta}] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[k \frac{(i\hat{\delta})^{k-1} - (-i\hat{\delta})^{k-1}}{k!} \right] = i \sin \hat{\delta}, \quad (28)$$

Підставляючи (28) в (26), одержимо

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial t} = -\frac{E_J}{\hbar} \sin \hat{\delta}. \quad (29)$$

Тоді з виразу (25) випливає, що струм через контакт узгоджується з першим рівнянням Джозефсона і дорівнює

$$I_{jj} = I_c \sin \hat{\delta}, \quad (30)$$

де використані введені раніше позначення $E_J = I_c \frac{\Phi_0}{2\pi} = I_c \frac{\hbar}{|e|}$. Зроблене

раніше припущення, що $[\hat{n}, \hat{\delta}] = -i$ є вірним. Воно вказує на те, що фізичні

величини $\hbar n$ і δ можна вважати канонічними змінними, для яких у

випадку квантовомеханічного опису комутатор дорівнює $[\hat{n}, \hbar \hat{\delta}] = -i\hbar$.

2.1.3. Кулонівська блокада.

Повний гамільтоніан зарядового кубіта $H = H_c + h_j$ можна записати у такому вигляді

$$H = \sum_n \left[4E_{cj} (n - n_g)^2 |n\rangle\langle n| - \frac{E_J}{2} (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|) \right]. \quad (31)$$

Для знаходження першого члена у квадратних дужках використана така ж схема, як і для оператора \hat{L} у виразі (21). Таке представлення H спрощує знаходження його власних значень. В реальних експериментах E_{cj} та E_J повинні бути значно більшими, ніж $k_B T$, щоб уникнути впливу теплових фотонів. В той же час ці величини повинні бути значно меншими, ніж ширина енергетичної щілини надпровідника. Це забезпечить небажаний вплив квазічастинок (неспарених електронів) на стан кубіта.

З виразу (31) видно, що матричні елементи n -го члена будуть точно такими ж, як і $(n+1)$ -го, за умови, що параметр n_g збільшиться на одиницю. Це означає система енергетичних рівнів буде періодично повторюватись зі зміною n_g . На **Рис. 3** показані залежності деяких нижніх рівнів від параметра n_g .

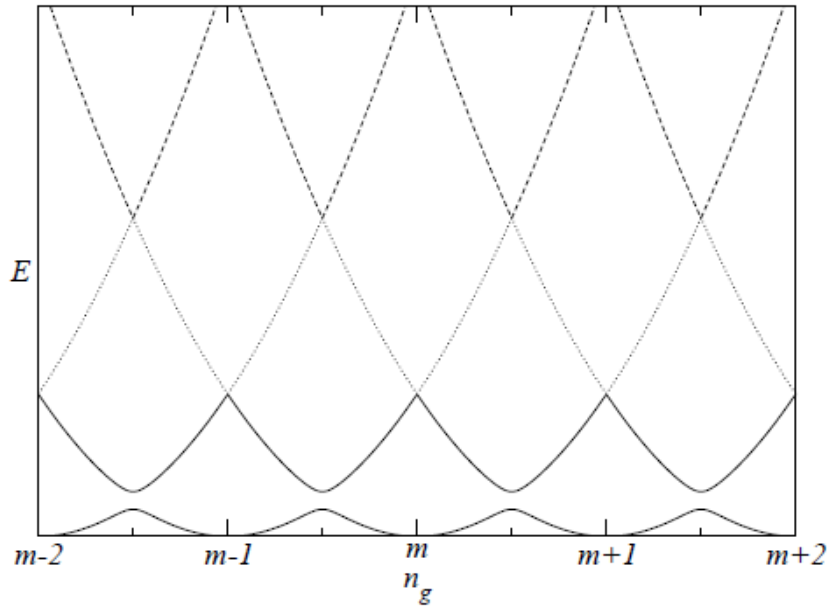


Рис. 3 . В точках $n_g = n \pm 1/2$, де перетнулися б параболи $4E_{cj} (n - n_g)^2$, спостерігається ефект зняття виродження (або “відштовхування” рівнів) внаслідок тунелювання куперівських пар. Цей ефект описується іншою частиною гамільтоніана, а саме: тунельним гамільтоніаном h_j .

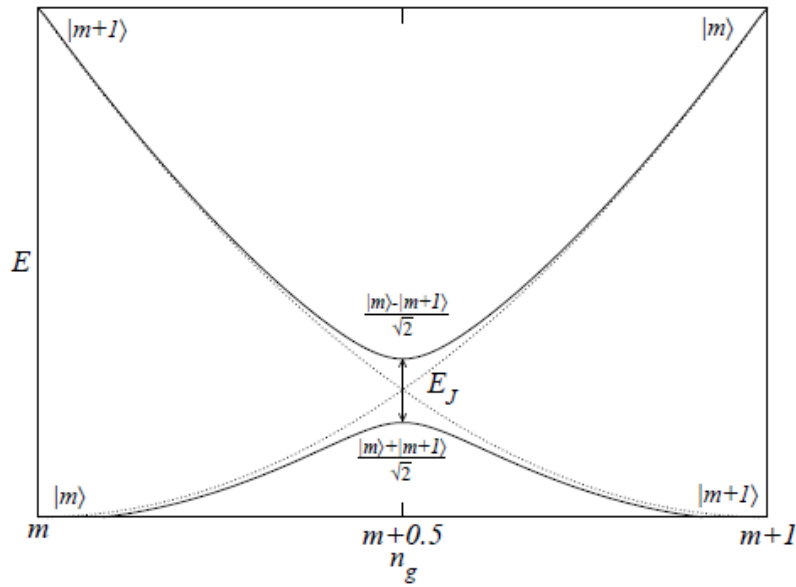


Рис. 4. Зображена одна область $m \leq n_g \leq m + 1$, де залежності енергій двох найнижчих рівнів від n_g показані суцільними лініями. Крпками показані лише енергії зарядів у найнижчих станах $|m\rangle$ та $|m + 1\rangle$. Видно, що найменша відстань між двома рівнями буде, коли $n_g = m + 1/2$. У цьому випадку вона дорівнює значенню параметра тунельного гамільтоніана E_J .

Зі зміною кількості куперівських пар на островку змінюється електричне поле між островком та його оточенням. Це поле може перешкоджати потраплянню в островок (або, навпаки, виходу з нього) окремих зарядів. Така ситуація називається кулонівською блокадою. Завдяки ефекту блокади можна розглядати островок, на який впливає зовнішнє електричне поле, та його оточення як дворівневу систему.

Положення квантових рівнів, а також відповідні власні функції визначається Гамільтоніаном системи. Для знаходження цих величин використовується стандартний підхід. Для нашої задачі досить обмежитись у гамільтоніані (31) лише m -им та $(m + 1)$ -им рівнями, якщо два найнижчі енергетичні стани не виходять за межі цього інтервалу. Гамільтоніану в дворівневому базисі $|m + 1\rangle$ та $|m\rangle$ відповідає матриця

$$H = \begin{vmatrix} 4E_{cj} (m + 1 - n_g)^2 & -E_J / 2 \\ -E_J / 2 & 4E_{cj} (m - n_g)^2 \end{vmatrix}. \quad (32)$$

Для спрощення записів введемо позначення: $m + 1/2 - n_g = \nu$. Тоді (32) переписеться у вигляді:

$$H = \begin{vmatrix} 4E_{cj}(\nu + 1/2)^2 & -E_J/2 \\ -E_J/2 & 4E_{cj}(\nu - 1/2)^2 \end{vmatrix}. \quad (33)$$

Запишемо матрицю в правій частині у вигляді суми трьох матриць:

$$H = 4E_{cj}(\nu^2 + 1/4)\hat{I} + 4E_{cj}\nu\sigma_z - (E_J/2)\sigma_x. \quad (34)$$

Якщо нас цікавить лише відстань між рівнями, то перший член у правій частині, пропорційний одиничній матриці, можна опустити: він не впливає на цю різницю. Якщо ж нам потрібні абсолютні значення енергій, то, коли відома згадана відстань, їх можна легко знайти, врахувавши, що енергія нижнього рівня дорівнює $4E_{cj}(\nu^2 + 1/4)$.

Далі використаємо гамільтоніан (34), але без першого члена:

$$H = 4E_{cj}\nu\sigma_z - (E_J/2)\sigma_x. \quad (35)$$

Цей вираз часто зустрічається в літературі. Щоб уникнути використання матриць, можна скористатись позначеннями Дірака і оператори Паулі записати у більш лаконічній формі:

$$\sigma_x = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|, \quad \sigma_y = -i|1\rangle\langle 0| + i|0\rangle\langle 1|, \quad \sigma_z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|$$

Згідно з цими позначеннями ненульові матричні елементи матриць Паулі дорівнюють:

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{1,0} &= \langle 1|(|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|)|0\rangle = (\sigma_x)_{0,1} = 1, \\ (\sigma_y)_{1,0} &= \langle 1|(-i|1\rangle\langle 0| + i|0\rangle\langle 1|)|0\rangle = -(\sigma_y)_{0,1} = -i, \\ (\sigma_z)_{11} &= \langle 1|(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|)|1\rangle = -\langle 0|\sigma_z|0\rangle = 1. \end{aligned}$$

Нехай власною функцією гамільтоніана (35) буде якась суперпозиція станів $|m+1\rangle$ і $|m\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \alpha|m+1\rangle + \beta|m\rangle \equiv \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}. \quad (36)$$

Коефіцієнти α і β є комплексними числами, які задовольняють умову нормування хвильової функції: $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Матричне рівняння для знаходження власних функцій має вигляд

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle. \quad (37)$$

З (37) одержимо два лінійні однорідні рівняння для невідомих величин α і β :

$$\left. \begin{aligned} 4E_{cj}\nu\alpha - (E_J/2)\beta &= E\alpha \\ -(E_J/2)\alpha - 4E_{cj}\nu\beta &= E\beta \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Існування ненульового розв'язку означає, що детермінант системи рівнянь (38) повинен дорівнювати нулю:

$$(4E_{cj}\nu - E)(-4E_{cj}\nu - E) - (E_j/2)^2 = 0. \quad (39)$$

Отже, задача звелась до знаходження коренів квадратного тричлена. У найпростішому випадку $\nu = 0$ (значення n_g знаходиться посередині інтервалу $[m, m + 1]$) одержимо:

$$E^2 = (E_j/2)^2. \quad (40)$$

Звідси знайдемо два різні значення енергії рівнів

$$E_{\pm} = \pm E_j/2. \quad (41)$$

Отже, відстань між ними дорівнює E_j . Саме ця величина вказана на **Рис. 4**.

Якщо $\nu \neq 0$, то

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{(4E_{cj}\nu)^2 + (E_j/2)^2}. \quad (42)$$

Значення $\nu = 0$ називають “солодкою точкою” (“sweet spot”). Ця назва пов'язана з тим, що флуктуації зовнішнього параметра n_g (далі позначені як δn_g) в рівнянні (39) зникають в околі цієї точки. Мова йде про лінійні по δn_g величини в (39). Оскільки $\delta n_g \sim \delta V_g$, то це означає, що малі флуктуації напруги джерела не впливають на стан кубіта. При цьому потрібно підкреслити, що швидкість зміни флуктуацій з часом повинна бути значно меншою, ніж ω_{10} . Якщо в шумовій частині сигналу є швидкозмінні компоненти, то їх вплив на стан кубіта потрібно аналізувати таким же чином, як і в першій частині лекцій, де розглядалась динаміка струмового фазового кубіта. Як ми переконались, раціональний вибір робочої точки може істотно зменшити рівень шумів у електричному колі кубіта і поліпшити його керованість.

Задача

Проаналізувати, як вплине на стан системи заміна контрольного параметра n_g на $n_g + \delta n_g(t)$, де додатковий сигнал

$$\delta n_g(t) = n_{lf}(t) + n_c(t) \cos(\omega_{10}t) + n_s(t) \sin(\omega_{10}t)$$

є малим, а швидкість зміни з часом функцій $n_{lf}(t)$, $n_c(t)$, $n_s(t)$ значно менша частоти переходу ω_{10} . Для пояснення використати сферу Блоха.

2.2. КУБІТ, КЕРОВАНИЙ МАГНІТНИМ ПОТОКОМ. (Flux-biased phase qubit)

Джозефсонівський контакт, розміщений у надпровідному кільці, також можна використати в схемі кубіта. У цьому випадку зміна стану кубіта, зокрема його керованість, може відбуватись шляхом зміни потоку магнітного поля всередині кільця.

2.2.1. Енергія надпровідного кільця з джозефсонівським контактом в магнітному полі.

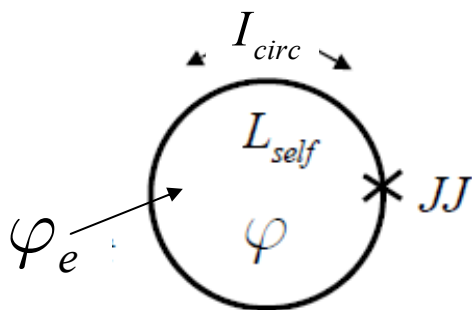


Рис. 1. Надпровідне кільце з джозефсонівським контактом JJ . Введені такі позначення: φ - магнітний потік всередині кільця, φ_e - потік створений зовнішнім джерелом магнітного поля, L_{self} - індуктивність кільця, I_{circ} - струм, що існує в кільці.

Потік магнітного поля всередині кільця задається різницею зовнішнього потоку φ_e та внутрішнього - $L_{self}I_{circ}$. Тут потрібно зазначити, що другий потік створює екрануючий ефект для зовнішнього, тобто зменшуючи його. Отже, можна записати

$$\varphi = \varphi_e - L_{self}I_{circ} . \quad (1)$$

Магнітна енергія кільця дорівнює

$$E_M = \frac{1}{2} L_{self} (I_{circ})^2 = \frac{1}{2} \frac{(\varphi - \varphi_e)^2}{L_{self}} . \quad (2)$$

Струм у кільці I_{circ} визначається першою формулою Джозефсона, в яку входить фаза δ (див. частину 1):

$$I_{circ} = I_c \sin \delta . \quad (3)$$

Значення δ дорівнює різниці фаз хвильової функції на протилежних поверхнях джозефсонівського контакту $\theta_2 - \theta_1$. Водночас ця різниця (δ) виражається через магнітний потік крізь кільце

$$\delta = \frac{e}{\hbar} \varphi. \quad (4)$$

(Див. частину 1.) Похідні по часу від обох сторін (4) також однакові. З джозефсонівським струмом (3) пов'язана частина енергії кубіта

$$E_{jj} = -E_J \cos \delta = -E_J \cos \left(2\pi \frac{\varphi}{\Phi_0} \right). \quad (5)$$

Якщо вважати величину δ "координатою" в повному гамільтоніані, то сума енергій E_M і E_{jj} становитиме потенціальну енергію кола. "Кінетична" енергія пов'язана з ємністю кола. На **Рис. 1** не показана ємність кола. Але вона може бути і як окремий елементом кола, і завжди існує власна ємність, утворена самим контактом. Це показано на **Рис. 2**.

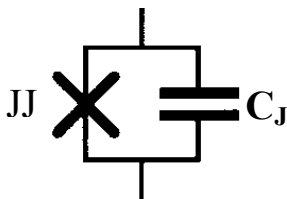


Рис. 2. На рисунку хрестиком показаний сам контакт і його ємність C_J

Енергія конденсатора E_{kin} , до якого прикладена напруга V , дорівнює

$$E_{kin} = \frac{1}{2} C_J V^2. \quad (6)$$

Врахувавши рівність (4), з другого рівняння Джозефсона одержимо важливе співвідношення

$$V = \frac{\hbar}{|e|} \dot{\delta} = \dot{\varphi}. \quad (7)$$

Тоді замість (6) можна записати

$$E_{kin} = \frac{1}{2} C_J \dot{\varphi}^2. \quad (8)$$

Лагранжیان системи дорівнює різниці кінетичної та потенціальної енергій:

$$L = E_{kin} - E_{jj} - E_M . \quad (9)$$

Він залежить від двох змінних – “координати” δ та “швидкості” $\dot{\delta}$. Далі стандартним шляхом знаходиться узагальнений імпульс q , використовуючи перетворення Лежандра, знайдемо гамільтоніан системи. У нашому простому випадку можна відразу записати, що узагальнений імпульс дорівнює

$$q = C_J \dot{\delta} , \quad (10)$$

і тоді гамільтоніан як функція координати й імпульса матиме такий вигляд:

$$H(\varphi, q) = \frac{q^2}{2C_J} - E_J \cos\left(2\pi \frac{\varphi}{\Phi_0}\right) + \frac{(\varphi - \varphi_e)^2}{2L_{self}} . \quad (11)$$

Пара канонічних змінних (q, φ) при переході до квантово-механічного опису заміниться на оператори $(\hat{q}, \hat{\varphi})$. Їх комутатор дорівнює

$$[\hat{q}, \hat{\varphi}] = -i\hbar . \quad (12)$$

Тоді оператор імпульсу в координатному представленні можна взяти рівним

$$\hat{q} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

У цьому випадку комутаційне співвідношення виконується автоматично.

2.2.2. Модель двоямного потенціалу.

Два найнижчі стани гамільтоніана (11) $|0\rangle$ і $|1\rangle$ можна використати як стани кубіта. Гамільтоніан (11) залежить від зовнішнього потоку φ_e , який може бути контролюючим параметром стану кубіта. Існують окремі значення φ_e , а саме, $(\varphi_e / \Phi_0) = n + 1/2$, де n - ціле число або нуль, при яких потенціальна енергія U , що дорівнює

$$U(\varphi) = -E_J \cos\left(2\pi \frac{\varphi}{\Phi_0}\right) + \frac{(\varphi - \varphi_e)^2}{2L_{self}} , \quad (13)$$

матиме вигляд, як на **Рис. 3**. На ньому показана потенціальна енергія поблизу абсолютного мінімуму.

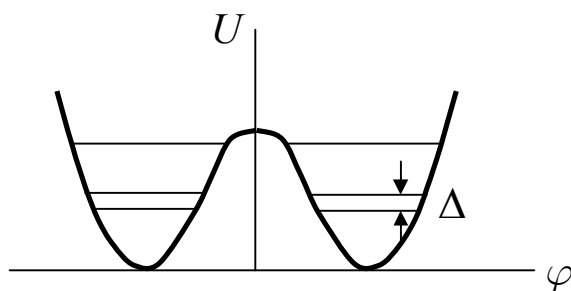


Рис. 3. Двоямний потенціал. Найнижчі енергетичні рівні в окремих ямах будуть мати однакову енергію, якщо відсутнє тунелювання крізь бар'єр. Якщо ж існує тунелювання, то виродження найнижчого рівня знімається. Величина Δ дорівнює відстані між найнижчими рівнями.

Якщо $(\varphi_e / \Phi_0) \neq n + 1/2$, то бар'єр втрапить свою симетрію і відстань між найнижчими рівнями залежатиме від конкретного значення φ_e / Φ_0 . Далі вважатимемо, що ймовірність тунелювання мала (але ненульова). Тоді для знаходження положення найнижчих рівнів можна використати потенціали двох нескінченно глибоких ям U_r і U_l (на **Рис. 4** показані лише дві симетричні ями). У цьому випадку можна вважати, що існують два незалежних гамільтоніани: H_r і H_l . Їх власні стани визначаються з незалежних двох рівнянь Шредінгера:

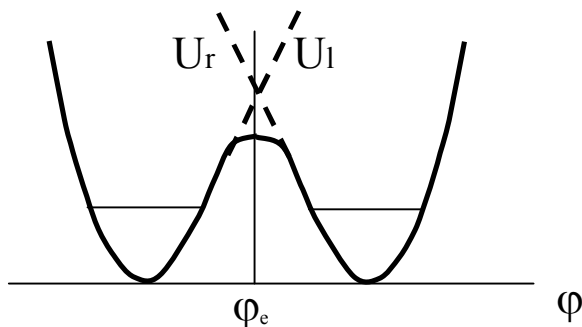


Рис. 4. Пунктирними кривими показані потенціальні енергії окремих (гіпотетичних) ям: U_r - права, U_l - ліва.

$$H_r |r\rangle = E_r |r\rangle, \quad H_l |l\rangle = E_l |l\rangle. \quad (14)$$

Очевидно, що коли нижні рівні знаходяться біля двох мінімумів потенціальної енергії, то відповідні хвильові функції будуть локалізовані саме в цих областях і не залежатимуть від поведінки потенціальної енергії в широкій області. Саме в “придонних” областях різниці $(U - U_r)$ і

$(U - U_l)$ малі за величиною і менші нуля. Тому можна вважати функції $|r\rangle$ і $|l\rangle$ близькими до “істинних” власних функцій гамільтоніана дворівневої системи. Останні можна знайти з рівняння Шредінгера, повний гамільтоніан в якому можна записати двома еквівалентними способами:

$$H = H_r + (U - U_r) = H_l + (U - U_l). \quad (15)$$

Тоді, використовуючи функції $|r\rangle$ і $|l\rangle$ як базис, можна переписати повний гамільтоніан у вигляді матриці:

$$H = \begin{vmatrix} E_l + \langle l|U - U_l|l\rangle & \langle l|H|r\rangle \\ \langle r|H|l\rangle & E_r + \langle r|U - U_r|r\rangle \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Недіагональні матричні елементи відмінні від нуля лише внаслідок незначного тунелювання з одного мінімуму в інший. Вираз (16) можна додатково спростити, врахувавши, що різниці $U - U_l$ і $U - U_r$ є малими величинами у порівнянні зі значеннями E_l і E_r (див. пояснення після формули (14)). Тоді замість (16) можна записати

$$\begin{aligned} H &\approx \begin{vmatrix} E_l & \langle l|H|r\rangle \\ \langle r|H|l\rangle & E_r \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} E_l & \langle l|H|r\rangle \\ \langle r|H|l\rangle & E_r \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{vmatrix} E_l & -\Delta/2 \\ -\Delta/2 & E_r \end{vmatrix} = \frac{E_l + E_r}{2} \hat{I} + \frac{\varepsilon}{2} \sigma_z - \frac{\Delta}{2} \sigma_x, \end{aligned} \quad (17)$$

де $\Delta = -2\langle l|H|r\rangle$, $\varepsilon = E_l - E_r$. Для простоти вважаємо, що ями мають однакову форму, але можуть бути дещо зміщеними по висоті одна відносно другої. Найнижчі стани в кожній з ям не перетинають вісь φ , тобто не мають вузлів. Тому, не обмежуючи загальності розгляду, можна вважати, що обидві функції $|r\rangle$ і $|l\rangle$ є скрізь позитивними і тоді $\Delta > 0$.

Як і раніше, перший член в останньому виразі (17) можна не враховувати, а другий відмінний від нуля лише, коли дно лівого мінімуму зміщене відносно правого на величину ε . Отже, для кубіта можна використовувати гамільтоніан у вигляді суми

$$H = \frac{\varepsilon}{2} \sigma_z - \frac{\Delta}{2} \sigma_x. \quad (18)$$

Власні функції цього гамільтоніана $|\Psi\rangle = \alpha|l\rangle + \beta|r\rangle$ знаходяться з рівняння

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (19)$$

яке зводиться до системи двох лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2}\alpha - \frac{\Delta}{2}\beta &= E\alpha \\ -\frac{\Delta}{2}\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\beta &= E\beta \end{aligned} \quad (20)$$

Нетривіальний розв'язок системи (20) існує тоді, коли детермінант системи рівнянь (20) дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon}{2} - E & -\frac{\Delta}{2} \\ -\frac{\Delta}{2} & -\left(\frac{\varepsilon}{2} + E\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

Звідси знаходимо два різні значення енергії рівнів:

$$E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}. \quad (22)$$

Використовуючи співвідношення (20) та значення енергій (22), можна знайти хвильові функції нижнього і верхнього рівнів. Вони мають вигляд

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \alpha_{\pm} \left[|l\rangle \mp \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} \mp \varepsilon}{\Delta} |r\rangle \right], \quad (23)$$

де

$$\alpha_{\pm} = \frac{\Delta}{\left[\Delta^2 + \left(\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} \mp \varepsilon \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (24)$$

У випадку симетричного потенціалу ($\varepsilon = 0$) одержимо такі значення коефіцієнтів: $\alpha_{\pm} = 1/\sqrt{2}$, $\beta_{\pm} = \mp 1/\sqrt{2}$. Тоді хвильові функції верхнього і нижнього рівнів відповідно дорівнюють

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{2} [|l\rangle \mp |r\rangle]. \quad (25)$$

Як і слід було очікувати, верхній рівень відповідає асиметричній хвильовій функції, нульове значення якої знаходиться в точці $\varphi = \varphi_e$. Найнижчий рівень є симетричною функцією. Така симетрія хвильових функцій відповідає загальним принципам квантової механіки, а також свідчить про адекватність використаного тут методу.

Задача

Проаналізувати, як вплине на стан системи заміна контрольного параметра (зовнішнього магнітного потоку) φ_e на $\varphi_e + \delta\varphi_e(t)$, де додатковий сигнал

$$\delta\varphi_e(t) = \varphi_{lf}(t) + \varphi_c(t) \cos(\omega_{10}t) + \varphi_s(t) \sin(\omega_{10}t)$$

є малим, а швидкість зміни з часом функцій $\varphi_{lf}(t)$, $\varphi_c(t)$, $\varphi_s(t)$ значно менша частоти переходу ω_{10} . Врахувати, що потенціальна енергія зміниться

на величину $\delta U(t) = -\frac{\delta\varphi_e(t)}{L_{self}}(\varphi - \varphi_e)$. Для пояснення результату

використати сферу Блоха.

2.3 ДИНАМІКА КВАНТОВИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Quantum dynamics of electrical circuits

Ми вже відзначали, що електромагнітні імпульси, що циркулюють в колах з джозефсонівськими контактами, можуть зберігати високу когерентність, якщо провідники та окремі складові кіл (ємності та індуктивності) також знаходяться в надпровідному стані. Відсутність дисипативних процесів у таких колах робить можливим використання рівняння Шредингера для опису квантового стану систем. Проведення експериментальних досліджень спрощується, якщо довжини хвиль випромінювання значно більші розмірів окремих елементів. Тоді відпадає необхідність враховувати просторовий розподіл поля. Системи можна описувати в так званому наближенні окремих елементів (“the lumped element limit”). Далі розглянемо квантову теорію саме такого елемента - LC резонатора, який часто використовують як резервуар енергії або ж як спектральний фільтр.

2.3.1 LC ОСЦИЛЯТОР

Енергія електромагнітного поля, зосереджена в колі, зображеному на **Рис. 1**, є сумою енергій електричного поля в конденсаторі (E_c) і магнітного поля в котушці (E_L):

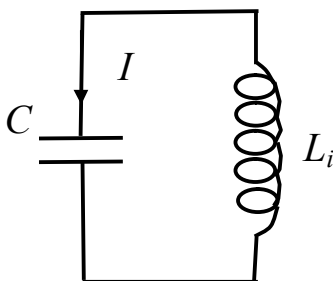


Рис. 1. Електричне коло з ємністю C та індуктивністю L_i , I - циркулюючий у колі струм. Затухання коливань в умовах надпровідного стану вважається неістотним.

$$E = E_c + E_L = \frac{1}{2} CV^2 + \frac{1}{2} L_i I^2, \quad (1)$$

де V - напруга на конденсаторі. Підставимо замість напруги V її значення $\frac{Q}{C}$, де Q - заряд конденсатора, а замість струму I похідну $\frac{dQ}{dt}$. Тоді повна енергія буде функцією лише заряду і його похідної по часу:

$$E = \frac{1}{2} L_i \dot{Q}^2 + \frac{1}{2C} Q^2. \quad (2)$$

Перший член у правій частині (2) відповідає “кінетичній” енергії осцилятора, яка є магнітною енергією, накопиченою в індуктивності. Другий визначає величину “потенціальної” енергії, тобто енергії електричного поля між обкладинками конденсатора. При такому записі виразу для E величини Q і \dot{Q} можна інтерпретувати як “координату” і “швидкість” осцилятора, “маса” якого дорівнює L_i , а $\frac{1}{C}$ дорівнює $m\omega^2$, де $\omega = (L_i C)^{-1/2}$ - частота коливань.

Лагранжіан системи дорівнює різниці кінетичної і потенціальної енергій, з якого знайдемо узагальнений імпульс $p = m\dot{Q}$. Тоді гамільтоніан, виражений через канонічні змінні q і Q матиме вигляд:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} Q^2. \quad (3)$$

Далі використаємо квантову теорію осцилятора. Необхідність квантово-механічного опису продиктована тим, що в системі з кубітами важливим (і навіть критично важливим) є кожен квант енергії. Ситуація істотно відрізняється від звичайних радіотехнічних пристроїв, де відбуваються процеси з великою кількістю квантів і тому класичний опис резонаторів (осциляторів) цілком виправданий. Перехід до квантово-механічного опису відбувається після формальної заміни координати Q і імпульсу p на відповідні оператори, комутаційне співвідношення між якими має вигляд

$$[\hat{Q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (4)$$

Перехід від самоспряжених операторів \hat{Q} і \hat{p} до змінних \hat{a} і \hat{a}^+ , використання яких у багатьох задачах є зручнішим, здійснюється за допомогою лінійних співвідношень:

$$\hat{a} = e^{i\omega t} \frac{m\omega Q + i\hat{p}}{(2m\hbar\omega)^{1/2}}$$

$$\hat{a}^+ = e^{-i\omega t} \frac{m\omega Q - i\hat{p}}{(2m\hbar\omega)^{1/2}}. \quad (5)$$

Використовуючи (4), знайдемо комутатори для безрозмірних операторів \hat{a} і \hat{a}^+ :

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^+, \hat{a}^+] = 0. \quad (6)$$

З формул (5) можна виразити оператори \hat{Q} і \hat{p} через \hat{a} і \hat{a}^+ . Після такої заміни оператор Гамільтона набуде простого вигляду:

$$H = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right). \quad (7)$$

(Тут позначення операторних величин вже не використовуються.) Як бачимо з (7), гамільтоніан H характеризується єдиним параметром – енергією кванта $\hbar\omega$. Добуток $a^+ a$ є оператором кількості квантів коливної енергії гармонічного осцилятора.

2.3.2. Квантування поля в резонаторі, утвореному трансмісійною лінією.

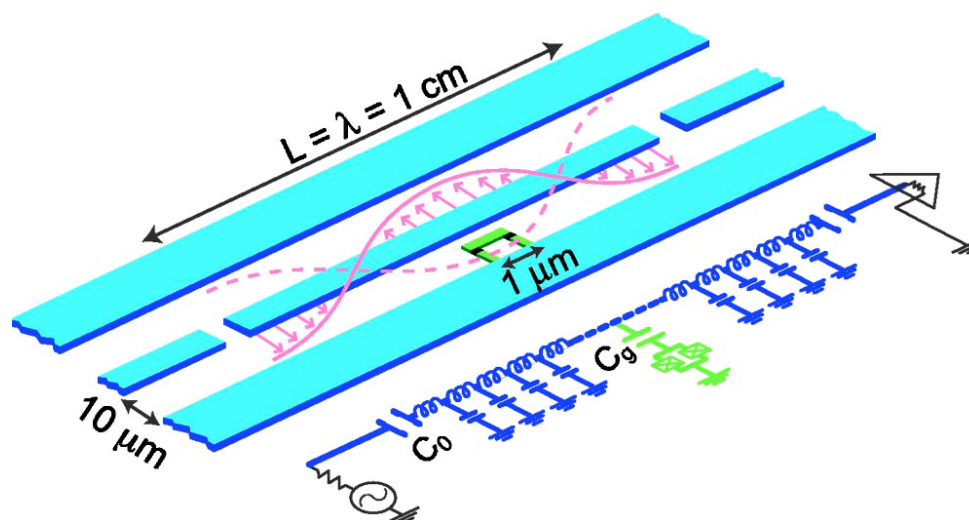


Рис. 2. Схематично показана одна з можливих реалізацій резонатора з використанням трансмісійної лінії. Середня частина надпровідника має обірвані кінці, які пов'язані з її продовженнями лише за рахунок невеликої ємності C_0 (див. внизу еквівалентну схему). Ця ж частина утворює ємнісний зв'язок із заземленою нижньою та верхньою шинами. Цей зв'язок умовно позначений на еквівалентній схемі низкою конденсаторів з невеликою ємністю, які лише вказують на його нелокальність – ємність неперервно розподілена на інтервалі L . Таким же чином розподілена індуктивність цієї частини. Вона умовно показана маленькими соленоїдами. Два джозефсонівські контакти сформовані на петлі з розміром $1 \mu m$. Магнітним потоком в петлі (не показаним на рисунку) можна керувати проходженням струму в колі кубіта, досягаючи максимальної чутливості до сигналу з резонатора (тобто для настроювання).

Лагранжіан резонатора Λ , як і в попередньому випадку, є різницею кінетичної і потенціальної енергій. На відміну від попереднього випадку ці величини неперервно розподілені на всій довжині L . Враховуючи цю особливість, можна записати

$$\Lambda = \int_{-L/2}^{L/2} dx \left(\frac{l}{2} j^2 - \frac{1}{2c} q^2 \right), \quad (8)$$

де $j(x, t)$ і $q(x, t)$ локальні значення густини струму і заряду. Існування невеликих ємностей C_0 не враховано. Зробимо заміну змінної у (8):

$$\zeta(x, t) \equiv \int_{-L/2}^x dx' q(x', t). \quad (9)$$

Величина $\zeta(x, t)$ - це сумарний заряд на відрізку $[x, -L/2]$ в момент часу t . Тоді можна вважати, що похідна $\dot{\zeta}(x, t)$ - це густина струму в точці x в момент t . А похідна по координаті $\partial_x \zeta(x, t)$ дорівнює $q(x, t)$, що видно формули (9). Тоді лагранжіан (8) можна записати як функціонал від $\dot{\zeta}(x, t)$ і $\partial_x \zeta(x, t)$:

$$\Lambda = \int_{-L/2}^{L/2} dx \left(\frac{l}{2} \dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2c} (\partial_x \zeta)^2 \right). \quad (10)$$

Зручнішим є представлення $\zeta(x, t)$ у вигляді суми

$$\zeta(x, t) \equiv \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n_o=1} \phi_{k_o}(t) \cos \frac{\pi n_o x}{L} + \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n_e=2} \phi_{k_e}(t) \sin \frac{\pi n_e x}{L}, \quad (11)$$

де індекси o і e означають непарні (odd) та парні (even) числа n . Верхні межі сум ми не вказуємо, оскільки швидкозмінних (у просторі і часі) складових у нашому розгляді не буде. Явний вигляд правої частини підібраний так, щоб кожен з доданків задовольняв граничні умови на кінцях відрізка L :

$\cos \frac{\pi n_o x}{L} = \sin \frac{\pi n_e x}{L} = 0$, коли $x = \pm \frac{L}{2}$. У цьому випадку струм в крайніх точках $\pm L/2$ відсутній.

Після підстановки (11) в (10) та інтегрування по x одержимо

$$L = \sum_n \left[\frac{l}{2} \dot{\phi}_n^2 - \frac{1}{2c} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \phi_n^2 \right]. \quad (12)$$

Під час інтегрування враховано, що

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \cos \frac{\pi n_o x}{L} \cos \frac{\pi n'_o x}{L} = \delta_{n_o, n'_o} \quad \frac{L}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \sin \frac{\pi n_e x}{L} \sin \frac{\pi n'_e x}{L} = \delta_{n_e, n'_e} \frac{L}{2}.$$

Інтегрування добутків синусів на косинуси завжди дорівнює нулю.

Функція Лагранжа (12) описує систему незалежних гармонічних

осциляторів, кожен з яких має “масу” l і частоту $\omega = \frac{\pi n}{L\sqrt{lc}}$, n - ціле

число. Тепер узагальненими імпульсами можна вважати величини

$$\pi_n(t) = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\phi}_n} = l \dot{\phi}_n(t). \text{ Дві канонічно спряжені величини } \pi_n(t) \text{ і } \phi_n(t) \text{ після}$$

переходу до квантово-механічного опису замінюються операторами, комутатор яких дорівнює:

$$[\hat{\phi}_n(t), \hat{\pi}_n(t)] = i\hbar. \quad (13)$$

Оператор Гамільтона для системи з лагранжіаном (12) має вигляд:

$$\hat{H} = \sum_n \left[\frac{1}{2l} \hat{\pi}_n^2 + \frac{1}{2c} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \hat{\phi}_n^2 \right]. \quad (14)$$

Як і в попередньому параграфі, перейдемо від операторів ”координати” $\hat{\phi}_n$ та ”імпульсу” $\hat{\pi}_n$ до безрозмірних операторів \hat{a}_n і \hat{a}_n^+ народження і знищення, для яких виконуються комутаційні співвідношення $[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^+] = \delta_{n, n'}$:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_n(t) &= \sqrt{\frac{\hbar \omega_n c}{2}} \frac{L}{\pi n} [\hat{a}_n(t) + \hat{a}_n^+(t)] \\ \hat{\pi}_n(t) &= -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_n l}{2}} [\hat{a}_n(t) - \hat{a}_n^+(t)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Тоді гамільтоніан набере вигляду

$$\hat{H} = \sum_n \hbar \omega_n \left[\hat{a}_n^+ \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right]. \quad (16)$$

Перший член у квадратних дужках є оператором кількості квантів n -го осцилятора, а $1/2$ враховує нульові коливання вакууму з частотою ω_n .

Важливою характеристикою трансмісійної лінії є розподіл напруги по її довжині. Її можна визначити з таких міркувань. Величина заряду на невеликій ділянці Δx дорівнює густині заряду, помноженій на Δx . З формули (9) видно, що густина заряду в довільній точці x дорівнює похідній $\partial_x \zeta(x, t)$. З іншого боку цій же величині дорівнює напруга в цій точці

$V(x)$, помножена на ємність елемента Δx , яка дорівнює $\Delta x \times c$.

Прирівнявши ці дві величини, одержимо $cV(x) = \partial_x \zeta(x, t)$. Звідси легко одержимо

$$V(x) = -\sum_{n_o=1} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n_o}}{Lc}} \sin\left(\frac{\pi n_o x}{L}\right) [\hat{a}_{n_o}(t) + \hat{a}_{n_o}^+(t)] + \\ + \sum_{n_e=2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n_e}}{Lc}} \cos\left(\frac{\pi n_e x}{L}\right) [\hat{a}_{n_e}(t) + \hat{a}_{n_e}^+(t)] \quad (17)$$

Джозефсонівські контакти взаємодіють з усіма модами, присутніми в системі осциляторів, гамільтоніан яких задається виразом (16). Набір частот осциляторів є дискретним. Саме ця властивість істотно відрізняє нашу систему від розглянутої в попередньому параграфі, де резонатор ефективно взаємодіє з випромінюванням лише на одній частоті $\omega = (LC)^{-1/2}$. Отже, окремий відрізок трансмісійної лінії може виконувати роль резонатора або ж резервуара для фотонів з різними частотами ω_n .

На **Рис. 2** зображений профіль напруги для власного коливання з $n = 2$ (другий член у правій частині (17)). Джозефсонівські контакти, як правило, розташовують поблизу максимального значення напруги. Зокрема її величина поблизу центральної точки $x = 0$ знаходиться з формули (17) і дорівнює

$$V(x=0) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_2}{Lc}} [\hat{a}_2(t) + \hat{a}_2^+(t)]. \quad (18)$$

У цьому параграфі досліджувався ідеалізований випадок, коли фрагмент лінії не був зв'язаний з іншими елементами електричних кіл. Наявність зв'язку з оточенням через ємності C_0 і C_g впливає на коливальні процеси в лінії. Проте, коли зв'язок слабкий, то фізична картина мало зміниться, і тоді вплив оточення можна врахувати аналітичними методами.

2.3.3. КВАНТОВА ТЕОРІЯ ОСЦИЛЯЦІЙ РАБІ ТА НЕРУЙНІВНІ ВИМІРЮВАННЯ СТАНІВ РЕЗОНАТОРА І ДВОРІВНЕВОЇ СИСТЕМИ .

З попередніх розділів видно, що важливу роль в еволюції дворівневої системи відіграють і інші елементи електричних кіл. Зокрема накопичення в резонаторі фотонів може істотно впливати на швидкість зміни стану всієї системи. Для детальнішого опису динаміки кубіта, сполученого з резонатором, знову використаємо електричну схему, зображену на **Рис. 2**.

Як і в попередньому параграфі, вважаємо, що друга мода (ω_2) відрізка лінії,

обмеженого з двох боків конденсаторами C_0 , близька до частоти переходу ω_{10} , і саме за її участі сформовано резонатор. Величини ємностей C_g і C_0 вважаємо малими. Два кубіти між середньою і нижньою шинами замінимо одним, що не впливатиме на подальші пояснення.

Для аналізу використаємо гамільтоніан (35) (див. Частина 2) для зарядового кубіта:

$$H = 4E_{cj}\nu\sigma_z - (E_J/2)\sigma_x. \quad (19)$$

Нагадаємо, що величина ν дорівнює $m + 1/2 - n_g$, де $n_g = C_g V_g / |e|$, а V_g - постійна напруга від зовнішнього джерела. Тепер замінимо V_g на суму $V_g + V(x=0)$, де $V(x=0)$ задається виразом (18). Новий гамільтоніан має вигляд

$$H = 4E_{cj}\nu\sigma_z - (E_J/2)\sigma_x + \hbar\omega(a^+a + 1/2) + 4E_{cj}\delta\nu\sigma_z. \quad (20)$$

Тут індекс "2" у виразі для $V(x=0)$ ми опустили. Щоб уникнути частини шумів, керуючу напругу беруть такою, де значення $\nu = 0$. Тепер перший член у правій частині (20) відсутній. Замість $\delta\nu$ підставимо його значення, виражене через змінні кубіта і резонатора:

$$\delta\nu = -\delta n_g = -C_g \delta V_g / |e|. \quad (21)$$

Тут замість δV_g слід підставити $V(x=0)$, задане формулою (18). Тоді замість (20) одержимо:

$$H = -(E_J/2)\sigma_x + \hbar\omega(a^+a + 1/2) - \hbar g \sigma_z (a^+ + a), \quad (22)$$

де $\hbar g = 4E_{cj} \frac{C_g}{|e|} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{Lc}}$. Більш звичним виглядає гамільтоніан після

повороту системи координат на $\pi/2$ навколо осі Y . Але необхідно врахувати, що після цієї операції зміняться позначення матриць Паулі:

$$\sigma_x \rightarrow -\sigma_z, \quad \sigma_z \rightarrow \sigma_x.$$

Сам гамільтоніан набуде вигляду

$$H = (\hbar\omega_{10}/2)\sigma_z + \hbar\omega(a^+a + 1/2) - \hbar g \sigma_x (a^+ + a). \quad (23)$$

Тут вже зроблена заміна $E_J = \omega_{10}$, де ω_{10} , як і раніше, - частота переходу між станами дворівневої системи за відсутності резонатора. Тепер

запишемо тотожність $\sigma_x(a^+ + a) = (\sigma_+ + \sigma_-)(a^+ + a)$ і після цього скористаємось наближенням хвиль, що обертаються:

$$\sigma_x(a^+ + a) \approx \sigma_+ a + \sigma_- a^+. \quad (24)$$

Тепер права частина описує поглинання фотона і появу кванта в дворівневій системі (перший доданок), і зворотний процес (другий доданок). В (24) ми знехтували високочастотними доданками і залишили лише ті, які описують плавну зміну з часом, оскільки частоти ω і ω_{10} близькі між собою:

$|\omega_{10} - \omega| \ll \omega_{10}, \omega$. Переконались у цьому можна, врахувавши залежність від часу операторів у правій частині (24). Для кращого розуміння якісної картини тимчасово знехтуємо взаємодією фотонів з дворівневою системою ($g \rightarrow 0$). В представленні Гейзенберга часова залежність добутку

визначається добутком експонент $\sigma_+(t)a(t) \sim e^{i\omega_{10}t} e^{-i\omega t} = e^{i(\omega_{10}-\omega)t}$.

Для іншої пари операторів ситуація аналогічна: $\sigma_-(t)a^+(t) \sim e^{-i(\omega_{10}-\omega)t}$.

Отже, як і в **Част. 1**, наближення (24) означає нехтування швидкоосцилюючими доданками. Тепер замість гамільтоніана (23) одержимо дещо відмінний:

$$H = (\hbar\omega_{10}/2)\sigma_z + \hbar\omega(a^+a + 1/2) - \hbar g(\sigma_-a^+ + \sigma_+a). \quad (25)$$

Вираз (25) називається гамільтоніаном Джейнса-Каммінгса (Jaynes-Cummings). Всі доданки в правій частині (25) можуть лише повільно

змінюватися в часі (у порівнянні з характерними частотами ω і ω_{10}). Саме в цьому виявляється схожість останнього члена в (25) з попередніми двома. Еволюція кожного з членів, пропорційних параметру g , визначається їхніми рівняннями руху:

$$\partial_t(\sigma_-a^+) = \frac{1}{i\hbar}[\sigma_-a^+, H], \quad \partial_t(\sigma_+a) = \frac{1}{i\hbar}[\sigma_+a, H]. \quad (26)$$

Для знаходження комутаторів можна використати відомі співвідношення:

$$\begin{aligned} [\sigma_+, \sigma_z] &= -2\sigma_+, & [\sigma_-, \sigma_z] &= 2\sigma_-, & [\sigma_+, \sigma_-] &= \sigma_z \\ [a, a^+a] &= a, & [a^+, a^+a] &= -a^+ \end{aligned} \quad (27)$$

Тоді з (26) одержимо два рівняння, в яких праві частини вважаються відомими:

$$\begin{aligned} (\partial_t + i\Delta)\sigma_-a^+ &= -ig(\sigma_z a^+ a + (1 + \sigma_z)/2) \\ (\partial_t - i\Delta)\sigma_+a &= ig(\sigma_z a^+ a + (1 + \sigma_z)/2) \end{aligned}, \quad (28)$$

де символом Δ позначена різниця частот $\Delta = \omega_{10} - \omega$. Таким же чином знайдемо швидкість зміни з часом оператора σ_z :

$$\dot{\sigma}_z = -i2g(\sigma_- a^+ - \sigma_+ a). \quad (29)$$

Вирази в правих частинах (28) можна записати в іншому вигляді:

$$\mp ig(\sigma_z a^+ a + (1 + \sigma_z)/2) = \mp ig\sigma_z N,$$

де використана тотожність $\sigma_z(1 + \sigma_z) = (1 + \sigma_z)$ і введене позначення $N = a^+ a + (1 + \sigma_z)/2$. Символом N позначений оператор повної кількості квантів ($a^+ a$ - кількість фотонів у резонаторі та $(1 + \sigma_z)/2$ - кількість квантів у дворівневій системі). Оператор N можна вважати інтегралом руху, оскільки він комутує з гамільтоніаном H і тому не змінюється з часом.

Додамо почленно ліві і праві частини рівнянь (28) і використаємо (29). В результаті одержимо:

$$\partial_t(\sigma_- a^+ + \sigma_+ a) = -i\Delta(\sigma_- a^+ - \sigma_+ a) = \frac{\Delta}{2g}\dot{\sigma}_z. \quad (30)$$

Використаємо рівність першого і останнього членів співвідношень (30)

$$\partial_t(\sigma_- a^+ + \sigma_+ a) = \partial_t\left(\frac{\Delta}{2g}\sigma_z\right). \quad (31)$$

Вона означає, що

$$\sigma_- a^+ + \sigma_+ a = \frac{\Delta}{2g}\sigma_z + const, \quad (32)$$

де величина “const” не залежить від часу. Після цього візьмемо похідні в другому і третьому членах співвідношень (30):

$$\frac{\Delta}{2g}\ddot{\sigma}_z = -i\Delta\partial_t(\sigma_- a^+ - \sigma_+ a). \quad (33)$$

Для виразу в правій частині використаємо співвідношення, знайдене з (28)

$$\partial_t(\sigma_- a^+ - \sigma_+ a) = -i\Delta(\sigma_- a^+ + \sigma_+ a) - i2\sigma_z N, \quad (34)$$

після чого рівняння для σ_z з врахуванням (32) набуде остаточного вигляду:

$$\ddot{\sigma}_z = -\sigma_z(\Delta^2 + 4g^2 N) - 2g\Delta \times const. \quad (35)$$

Постійний член в (35) можна опустити, оскільки його можна легко врахувати простою заміною невідомої функції σ_z . Розв'язками (35) є дві осцилюючі функції

$$\sigma_z \sim e^{\pm i\Gamma t}, \quad (36)$$

де $\Gamma = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2 N}$ має назву частоти Рабі. Середнє значення оператора $\sigma_z(t)$ легко знаходиться, якщо відомий початковий стан дворівневої системи. З наведеного розгляду випливає, що функція $\sigma_z(t)$ змінюється за гармонічним законом. Якщо в певний момент часу система знаходиться в основному стані, а в резонаторі є N фотонів, то, поглинаючи фотон, система переходить у збуджений стан. При цьому вона продовжує змінюватись, згодом повертаючись до початкового стану і випромінюючи фотон в резонатор. Цей процес неперервно повторюється. В цьому полягає суть осциляцій Рабі (Rabi oscillation). З виразу для Γ видно, що частота Рабі зростає при збільшенні різниці Δ і кількості фотонів у резонаторі N . Коли $\Delta = 0$, то частота Рабі дорівнює $\Gamma = 2g\sqrt{N}$. Саме у цьому випадку частота Рабі найбільше залежить від кількості фотонів у резонаторі. Отже, динаміка кубіта залежить від заселеності резонатора.

Взаємозв'язок між резонатором і колом кубіта через ємність C_g змінює резонансні характеристики обох. Величина електричного сигналу від зовнішнього джерела, який може заходити через ємність C_0 в систему, залежить від того, наскільки його частота відрізняється від частоти резонатора. Навіть невелике відхилення від резонансних умов може спричинити великий ефект, якщо добротність резонатора висока. Важливим є те, що ця частота, як ми переконаємося далі, залежить від стану кубіта. Тоді, вимірюючи відбитий (або пройдений через резонансну лінію) сигнал, можна дізнатись і про стан кубіта. Описана схема використовується на практиці для неруйнівного вимірювання стану кубіта. Схема руйнівного вимірювання, після якого кубіт зникає, описана нами раніше (частина 1, див. **Рис 9**).

Можна вказати на деякі необхідні вимоги щодо процедури вимірювань. Очевидно, що час вимірювання частоти резонатора \mathcal{T} повинен бути коротшим, ніж час релаксації стану кубіта. Ця вимога може забезпечуватись низьким рівнем шумів у колі кубіта. Водночас точність вимірювання частоти ($\delta\omega$) в принципі не може бути кращою, ніж \mathcal{T}^{-1} , внаслідок фундаментальної невизначеності для будь-яких хвильових процесів: $\delta\omega \times \mathcal{T} > 1$. Отже, обмеження на часовий інтервал існують з двох боків і їх потрібно враховуватись в реальних експериментах.

Власна частота кубіта залежить від населеності резонатора. Це можна використати для знаходження кількості фотонів у резонаторі (так звана спектроскопія кількості фотонів). В основі таких вимірювань є слабка взаємодія різних елементів електричної схеми. Необхідною умовою для цього є нерівності

$$\omega_{10}, \omega \gg g \quad (37)$$

(вважаємо, що гамільтоніан знову задається виразом (25)).

Дуже просте і наглядне поясненням резонансних властивостей двох взаємодіючих підсистем ілюструє модифікований гамільтоніан, який одержується в результаті унітарного перетворення:

$$\tilde{H} = U^{-1} H U \quad (38)$$

Оператор, що здійснює це перетворення, має вигляд

$$U = e^{-\frac{g}{\Delta} I_-}, \quad (39)$$

де $I_- = a^+ \sigma_- - a \sigma_-$.

Параметр цього перетворення $|g / \Delta|$ будемо вважати малою величиною:

$$|g / \Delta| \ll 1. \quad (40)$$

Ця умова жорсткіша, ніж умова (37). Можна переконатись, що множини власних значень обох гамільтоніанів (H і \tilde{H}) збігаються. Доведемо, що це дійсно так. Власні значення E_n і власні функції Ψ_n гамільтоніана H знаходяться з рівняння Шредінгера:

$$H \Psi_n = E_n \Psi_n. \quad (41)$$

Якщо представити хвильову функцію у вигляді $\Psi_n = U \varphi_n$, то (41) переписеться у вигляді

$$H U \varphi_n = E_n U \varphi_n. \quad (42)$$

Тепер помножимо ліву і праву частини (42) зліва на оператор U^{-1} . Тоді нове рівняння Шредінгера набуде іншого вигляду:

$$\tilde{H} \varphi_n = E_n \varphi_n, \quad (43)$$

де в правій частині враховано, що $U^{-1} U = 1$. Як бачимо, власне значення залишилось незмінним (рівним E_n). Отже і резонансні частоти при такому перетворенні гамільтоніана залишаються незмінними. Дещо забігаючи наперед, зазначимо, що гамільтоніан \tilde{H} відрізнятиметься від початкового тим, що він залежатиме лише від перенормованих власних частот резонатора та дворівневої системи.

Простий вираз для модифікованого гамільтоніана одержиться тоді, коли записати праву частину (38) у вигляді ряду Тейлора по степенях g / Δ і врахувати лише члени до другого порядку включно:

$$\tilde{H} = H - \frac{g}{\Delta} [H, I_-] + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\Delta} \right)^2 [[H, I_-], I_-]. \quad (44)$$

Перший комутатор дорівнює

$$[H, I_-] = -\hbar \left[2g \left(\sigma_z a^+ a + \frac{1 + \sigma_z}{2} \right) + \Delta I_+ \right], \quad (45)$$

де $I_+ = a^+ \sigma_- + a \sigma_-$. Другий комутатор з точністю до квадратичних членів розкладу дорівнює:

$$[[H, I_-], I_-] = -2\hbar \Delta \left(\sigma_z a^+ a + \frac{1 + \sigma_z}{2} \right). \quad (46)$$

Підставляючи вирази (45) і (46) в (44), одержимо

$$\tilde{H} = \frac{\hbar}{2} \left(\omega_{10} + \frac{g^2}{\Delta} \right) \sigma_z + \hbar \left(\omega + \frac{g^2}{\Delta} \sigma_z \right) a^+ a, \quad (47)$$

де ми опустили неістотний постійний член. Вираз (47) називається перенормованим гамільтоніаном. Він істотно відрізняється від гамільтоніана (25): в ньому вже відсутні лінійні по параметру взаємодії g доданки, змінились частоти резонатора та дворівневої системи. З виразу (47) видно, що початкова частота резонатора ω внаслідок взаємодії з кубітом змінилась на $\omega + (g^2 / \Delta) \sigma_z$. Отже, коли дворівнева система знаходиться у збудженому стані ($\sigma_z = 1$), то у випадку $\omega_{10} > \omega$ резонансна частота збільшиться на g^2 / Δ . І навпаки, коли $\sigma_z = -1$, то частота резонатора зменшиться на таку ж величину. Аналогічні міркування можна навести, коли $\omega_{10} < \omega$. Частотний зсув резонатора використовують для неруйнівного вимірювання стану кубіта.

Гамільтоніан (47) можна записати в іншому вигляді:

$$\tilde{H} = \frac{\hbar}{2} \left(\omega_{10} + \frac{2g^2}{\Delta} (a^+ a + 1/2) \right) \sigma_z + \hbar \omega a^+ a. \quad (48)$$

Тепер величину $\omega_{10} + \frac{2g^2}{\Delta} (a^+ a + 1/2)$ можна інтерпретувати як перенормовану взаємодією з резонатором частоту переходу дворівневої системи. Залежність добавки до частоти від кількості фотонів у резонаторі ($a^+ a$) є проявом ефекта Штарка, а добавка g^2 / Δ є лембівським зсувом. (Ці два терміни запозичені з атомної оптики.) Як видно, вже саме лише існування

порожнього резонатора змінює частоту переходу ω_{10} . Обидві добавки до ω_{10} можна знайти експериментальними методами, зокрема спрямувавши випромінювання через додаткові контакти безпосередньо на кубіт.

Вимірювання в квантових системах мають значний відтінок загадковості, оскільки ймовірнісна інтерпретація хвильової функції передбачає багатократні вимірювання для однієї і тієї ж системи. Але, чи будуть фази тестуючого випромінювання і кубіта ϕ залишатись незмінними для кожного окремого вимірювання. Якщо ця умова не виконується, то, дійсно, можна знайти лише ймовірність реалізації того чи іншого сценарію. Проблема вимірювання з однієї спроби ("single shot" measurement) вже досліджувалась. Її часткове вирішення можливе, коли в процесі вимірювання беруть участь багато тестуючи фотонів (див., наприклад, критерії, одержані в роботі [9]). У цьому випадку вимірювання з області суто квантових явищ переходять у квазікласичну область. При цьому потрібно враховувати, що збільшення кількості фотонів у резонаторі може призвести до розігріву системи і втрати нею властивості надпровідності, або ж до небажаних переходів на інші рівні.

2.3.4. УЗАГАЛЬНЕНІ ПОТОКИ В КВАНТОВИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ.

Опис квантових процесів в складних електричних колах базується на використанні рівняння Шредінгера. Останнє можна записати, коли відомий гамільтоніан всієї системи. Досі ми одержували гамільтоніани невеликих електричних кіл, які можуть бути лише фрагментами єдиної когерентної системи. Одержання рівняння Шредінгера спрощується після введення узагальнених змінних, які повністю описують окремі розгалуження. Це потоки $\varphi_b(t)$ (branch fluxes) і заряди $Q_b(t)$ (branch charges):

$$\varphi_b(t) = \int_{-\infty}^t V_b(t') dt', \quad Q_b(t) = \int_{-\infty}^t i_b(t') dt' \quad (49)$$

Нижні межі інтегрування взяті з тих міркувань, що струм і напруга в далекому минулому були відсутні. З виразів (49) видно, що напруга на елементі b

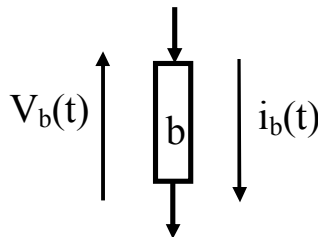


Рис. 3. Двополюсник b характеризується напругою на його кінцях V_b і

струмом i_b , що протікає через нього.

і струм через нього дорівнюють

$$V_b(t) = \partial_t \varphi_b(t) \quad \text{і} \quad i_b(t) = \partial_t Q_b(t). \quad (50)$$

Спочатку розглянемо випадок, коли елементом b є джозефсонівський контакт. На ньому похідна від фази $\partial_t \delta$, помножена на $2\pi/\Phi_0$, також дорівнює V_j . Тому можна замінити фазу $\delta(t)$ на $\frac{2\pi}{\Phi_0} \varphi_j(t)$. Після такої

заміни енергія джозефсонівського контакту дорівнює $-E_J \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \varphi_j\right)$ (див.

формулу (39), частина 1). Якщо елементом b є конденсатор, то його енергія $\frac{1}{2} C V_C^2$ виражається через похідну відповідного потоку як $\frac{1}{2} C (\partial_t \varphi_C)^2$.

Подібним чином енергію індуктивного елемента $\frac{1}{2} L_c i_L^2$ можна записати у вигляді $\frac{L}{2} (\partial_t Q_L)^2$.

Щоб проілюструвати процедуру одержання гамільтоніана на конкретному прикладі, розглянемо електричне коло, в якому присутні і джозефсонівські контакти, і окремі ємності, і резонатор. Еквівалентна схема цього кола може бути такою, як показано на **Рис. 4**:

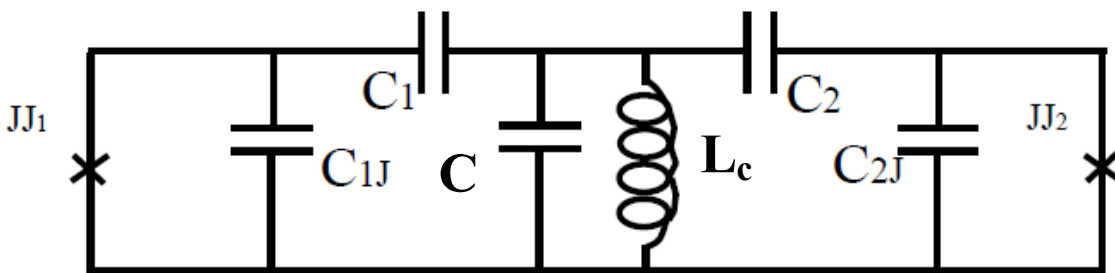


Рис. 4. Зліва і справа знаходяться джозефсонівські контакти JJ_1 і JJ_2 . В середній частині розташований $L_c C$ резонатор. Дві ємності C_{1J} і C_{2J} можуть бути власними ємностями тунельних контактів. Дві невеликі ємності C_1 і C_2 з'єднують дві частини схеми в одне ціле. Зовнішня частина кола, яка контролює проходження струму через контакти, не показана.

Стан джозефсонівського контакту JJ_1 і наповнення фотонами резонатора LC може впливати на праву частину кола (і навпаки). Щоб описати процеси, що відбуваються в цій системі, необхідно знати повний гамільтоніан. Для цього використаємо відомі вже вирази для енергій кожного з елементів схеми, виражені через змінні узагальнених потоків. “Потенціальна” енергія двох контактів JJ_1 і JJ_2 дорівнює

$$U_j = -E_{1J} \cos\left(2\pi \frac{\varphi_{1J}}{\varphi_0}\right) - E_{2J} \cos\left(2\pi \frac{\varphi_{2J}}{\varphi_0}\right), \quad (51)$$

де константи E_{1J} і E_{2J} можуть бути різними для різних контактів. Енергію індуктивності $U_L = \frac{1}{2} L_c i^2$ можна виразити через потік φ на конденсаторі C , якщо врахувати, що напруга V на ньому є такою ж, як і на індуктивності L_c :

$$V = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = L_c \frac{\partial i(t)}{\partial t}. \quad (52)$$

Тут використане співвідношення (50) і значення ерс самоіндукції на елементі L_c . Звідси одержимо (з точністю до константи), що $\varphi(t) = L_c i(t)$. Тоді

енергія індуктивності дорівнює $U_L = \frac{\varphi^2}{2L_c}$. Як бачимо, вона залежить лише

від “координати” φ . Отже, повна потенціальна енергія U дорівнює:

$$U = -E_{1J} \cos\left(2\pi \frac{\varphi_{1J}}{\varphi_0}\right) - E_{2J} \cos\left(2\pi \frac{\varphi_{2J}}{\varphi_0}\right) + \frac{\varphi^2}{2L_c}. \quad (53)$$

“Кінетична” енергія кола T дорівнює сумі енергій конденсаторів:

$$T = \frac{C_{1J}}{2} \dot{\varphi}_{1J}^2 + \frac{C_1}{2} (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{1J})^2 + \frac{C}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{C_2}{2} (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{2J})^2 + \frac{C_{2J}}{2} \dot{\varphi}_{2J}^2. \quad (54)$$

Тут ми підставили замість $\dot{\varphi}_1$ і $\dot{\varphi}_2$ величини $\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{1J}$ та $\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{2J}$. Коректність таких замін впливає із закону Кірхгофа, згідно якого сума напруг на замкнутих елементах кола повинна дорівнювати нулю.

Тепер можна записати лагранжіан системи L . Він дорівнює

$$L = T - U. \quad (55)$$

Він є функцією трьох “координат” $\varphi, \varphi_{1J}, \varphi_{2J}$ та відповідних

“швидкостей” $\dot{\varphi}, \dot{\varphi}_{1J}, \dot{\varphi}_{2J}$. Узагальнені імпульси q_i вводяться стандартними співвідношеннями:

$$q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}. \quad (56)$$

З трьох лінійних рівнянь (56) легко знаходяться значення “швидкостей” і після переходу до змінних $\{q_i, \varphi_i\}$ та перетворень Лежандра одержимо гамільтоніан системи H :

$$\sum_i q_i \dot{\varphi}_i - L = H\{q_i, \varphi_i\}. \quad (57)$$

Щоб скоротити запис, візьмемо симетричні параметри кола:

$$E_{1J} = E_{2J} \equiv E_J, \quad C_{1J} = C_{2J} \equiv C_J, \quad C_1 = C_2 \equiv C_c \text{ і вважатимемо}$$

значення ємності C_c малим параметром. Тоді гамільтоніан дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} H \approx & \frac{q_{1J}^2 + q_{2J}^2}{2C_J} \left(1 - \frac{C_c}{C_J}\right) + \frac{q^2}{2C} \left(1 - \frac{2C_c}{C}\right) + q(q_{1J} + q_{2J}) \frac{C_c}{C_J C} - \\ & - E_J \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \varphi_{1J}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \varphi_{2J}\right) \right] + \frac{\varphi^2}{2L_c}. \end{aligned} \quad (58)$$

Перший член у правій частині описує енергію поля у двох ємностях, що шунтують контакти, другий і останній – повна енергія LC резонатора, третій – енергія взаємодії кубітів з резонатором, четвертий – потенціальна енергія контактів. Два множники $(1 - C_c/C_J)$ і $(1 - 2C_c/C)$ враховують перетікання зарядів з кіл кубітів і резонатора на перехідні ємності C_c .

Після підстановки явних виразів для операторів узагальнених імпульсів $q_i = -i\hbar \partial / \partial \varphi_i$ одержимо рівняння Шредінгера для хвильової функції $\Psi \equiv \Psi(\varphi, \varphi_{1J}, \varphi_{2J})$:

$$i\hbar \partial_t \Psi = H(q_i, \varphi_i) \Psi. \quad (59)$$

Якщо відомі початкові умови, то з розв’язків (59) можна дослідити еволюцію квантових станів.

Метод одержання рівняння Шредінгера для консервативного кола, показаного на **Рис. 4**, далеко не вичерпує усіх можливих ситуацій, що зустрічаються на практиці. Як врахувати вплив зовнішнього оточення, яке налічує нескінченну кількість степенів свободи, чи вплив зовнішнього поля на функціонування квантових кіл можна знайти в роботі [11].

Література

1. P. W. Shor, *Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring*, Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundation of Computer Science, S. Goldwasser ed., p. 124, IEEE Press (1994).
2. P. W. Shor, *Polynomial time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer*, SIAM J. Comput. **26**, 1484 (1997).
3. P. W. Shor, *Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory*, Phys. Rev. **A52**, 2493 (1995).
4. A. M. Steane, *Error Correcting Codes in Quantum Theory*, Phys. Rev. Lett. **77**, 793 (1996).
5. B. D. Josephson, *Possible new effects in superconductive tunnelling*, Phys. Lett., **1**, 251 (1962).
6. R. C. Jaklevic, John Lambe, A. H. Silver, and J. E. Mercereau, *Quantum interference effects in Josephson tunneling*, Phys. Rev. Lett. **12**, 159 (1964).
7. C. Hilbert and J. Clarke, *DC SQUIDS as radiofrequency amplifiers*, J. Low Temp. Phys., **61**, 263 (1985).
8. J. M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and K. M. Lang, and C. Urbina, *Decoherence of a superconducting qubit due to bias noise*, Phys. Rev. **B67**, 094510 (2003).
9. G. P. Berman, A. A. Chumak, and V. I. Tsifrinovich, *Dynamics of a Phase Qubit-Resonator System: Requirements for Fast Nondemolition Readout of a Phase Qubit*, J. Low Temp. Phys., **170**, pp. 172-184 (2013).
10. M. Boissonneault, J. M. Gambetta, and A. Blais, *Dispersive regime of circuit QED: Photon-dependent qubit dephasing and relaxation rates*, Phys. Rev. **A 79**, 013819 (2009).
11. G. P. Berman, A. A. Chumak, *Influence of External Fields and Environment on the Dynamics of Phase-Qubit-Resonator System*, Phys. Rev. **A 83**, 042322 (2011)