

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
“Київський політехнічний інститут”  
Фізико-математичний факультет

# МЕХАНІКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З ФІЗИКИ

Київ 2009

УДК: 531/534

ББК.....

Укладачі: Моїсеєнко В. І.  
Пугач О. В.  
Ужва В. І.  
Гарєєва Ф. М.

Рецензент: Лисенко М.Г.

Механіка: Метод. вказівки до лабораторних робіт з фізики.  
М.75 – К.: Видавець „Пугач О.В.”, 2009. – 40 с.

Ці методичні вказівки є практичним посібником під час виконання лабораторних робіт в лабораторіях фізико-математичного факультету НТУУ”КПІ”. Розраховані на студентів усіх форм навчання.

Видання перероблене, доповнене.

Затверджено  
Методичною Радою  
НТУУ “КПІ”.  
Протокол №7  
від 04.04.2002 р.

© Моїсеєнко В.І., Пугач О.В.,  
Ужва В.І., Гарєєва Ф.М., 2009  
© Пугач О.В., оформлення, 2009

**Вивчення теорії обробки результатів вимірювань  
у фізичній лабораторії  
на прикладі математичного маятника**

Мета роботи: набуття навичок побудови гістограми, вивчення теорії обробки результатів прямих вимірів.

Прилади та пристрої: математичний маятник, електронний секундомір.

**1.1. Теоретичні відомості**

У фізиці маятником вважають таке тверде тіло, яке коливається під дією сили тяжіння навколо нерухомої точки або осі. Прийнято розрізняти математичний і фізичний маятники.

Математичним маятником називають ідеалізовану систему, що складається з невагомої й нерозтяжної нитки довжиною  $\ell$ , на яку підвішена матеріальна точка масою  $m$ , яка може коливатися відносно точки підвісу  $O$  (рис. 1.1). Достатньо коректним наближенням до математичного маятника служить невелика важка куля, підвішена на довгій тонкій сталевій малорозтяжній нитці.

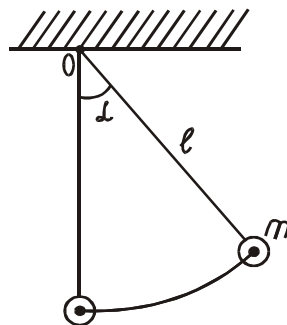


Рис.1.1

За малих кутів відхилення від положення рівноваги і при настільки малому терті, що ним можна знехтувати, математичний маятник здійснює гармонічні коливання, період яких визначається довжиною  $\ell$  маятника і прискоренням вільного падіння  $g$ :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Період коливань  $T$  маятника може бути обчислений за формулою або виміряний дослідним шляхом за допомогою годинника. Вимірювання періоду коливань математичного маятника за допомогою секундоміра – це прямі виміри. Але, вимірюючи період коливань, отримуємо не істинне, а середнє значення  $\langle T \rangle$ , тому необхідно оцінити ступінь наближення його до істинного значення  $T$ . Для успішного виконання цієї роботи радимо попередньо ознайомитися з коротким викладом “Теорії похибок і обробки результатів вимірювань у фізичній лабораторії”, який наведено у Додатку.

## 1.2. Опис установки та метод вимірювання

Моделлю математичного маятника в лабораторії є важка куля, яка підвішена на малорозтяжному дроті, довжина якого набагато більша за розміри кулі. Час коливань вимірюють електронним секундоміром з точністю до 0,001 с.

Вимірюючи час  $\Delta t_i$  п’яти повних коливань, значення періоду коливання отримуємо за формулою:

$$T_i = \frac{\Delta t_i}{5} \quad (1.1)$$

Для того, щоб коливання можна було вважати гармонічними (такими, що відбуваються за законом косинуса чи синуса), маятник слід відхиляти на невеликі кути (близько  $4^\circ$ ).

## 1.3. Послідовність виконання роботи

1. Привести маятник у коливний рух. Секундоміром виміряти час п’яти коливань, занести результат з точністю до 0,001 с до табл.1.1. Виконати 50 таких вимірювань.
2. Виконати ще одну серію з 50-ти вимірювань, дані занести до табл.1.2, яка подібна до табл.1.1, але для 100 вимірів.
3. Записати дані про секундомір:

$\delta$  (ціна поділки) = .....

Таблиця 1.1

Номер досліджу $n$	Час п'яти коливань $\Delta t_1$ , с	Період $T_1 = \Delta t_1/5$ , с	$\Delta T_i = T_i - \langle T \rangle$ , с	$\Delta T_i^2$ , с <sup>2</sup>
1				
2				
...				
50				

$$\sum_{i=1}^n T_i = \dots \quad \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 = \dots \quad \langle T \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n} \dots \quad (1.2.)$$

### Обробка результатів вимірювань

1. Розрахувати з точністю до 0,001 с за формулою (1.1) період коливань  $\langle T \rangle$  для 50-ти вимірювань. Результати розрахунків занести до табл. 1.1.
2. Провести в другій серії з 50-ти вимірювань такі самі розрахунки і дані занести до табл. 1.2.
3. Доповнити табл. 1.2 значеннями періодів  $T_i$  першої серії, утворивши таким чином серію зі ста значень  $T_i$ .
4. За формулою (1.2) розрахувати вибіркове середнє значення  $\langle T \rangle$  періоду коливань для серії з  $n = 50$  (табл.1.1) і серії  $n = 100$  (табл.1.2).
5. Розрахувати відхилення  $\Delta T_i$  кожного значення періоду  $T_i$  від середнього значення  $\langle T \rangle$ :

$$\Delta T_i = T_i - \langle T \rangle \quad (1.3)$$

для обох серій:  $n = 50$  і  $n = 100$ . Дані занести до табл. 1.1 і 1.2. Враховувати додатні та від'ємні значення  $\Delta T_i$ . Усі розрахунки вести з точністю до 0,001 с. У таблицях 1.3 і 1.4 подано діапазон відхилень  $\Delta T_i$  від  $-0,10$  с до  $+0,10$  с рівними інтервалами, шириною в 0,01 с.

6. Підрахувати кількість  $\Delta n_i$  значень  $\Delta T_i$ , що потрапили до кожного з інтервалів. Занести їх до другого рядка табл. 1.3 і 1.4.

7. Підрахувати відносну кількість значень  $\frac{\Delta n_i}{n}$ , що потрапили до кожного з інтервалів (1, 2, ...20), розділивши  $\Delta n_i$  з табл. 1.3 на  $n=50$ , а  $\Delta n_i$  з табл.1.4 на  $n=100$ . Результати занести до табл. 1.5.
8. Побудувати гістограми для серій з 50-ти і 100-та вимірювань.

На вертикальній осі гістограми відкладається значення  $\frac{\Delta n_i}{n}$ , а на горизонтальній осі – значення випадкової величини відхилень  $\Delta T_i$  за інтервалами ( рис.1.2).

Таблиця 1.3 (для  $n = 50$ )

Інтервали відхилень $\Delta T_i$	$-0,10 \leq \Delta T_i < -0,09$	$-0,09 \leq \Delta T_i < -0,08$	$-0,08 \leq \Delta T_i < -0,07$	$-0,07 \leq \Delta T_i < -0,06$	$-0,06 \leq \Delta T_i < -0,05$	$-0,05 \leq \Delta T_i < -0,04$	$-0,04 \leq \Delta T_i < -0,03$
№	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta n_i$ - кількість відхилень, що потрапляють у даний інтервал $\Delta T_i$							
$\Delta T_i$	$-0,03 \leq \Delta T_i < -0,02$	$-0,02 \leq \Delta T_i < -0,01$	$-0,01 \leq \Delta T_i < 0$	$0 \leq \Delta T_i < 0,01$	$0,01 \leq \Delta T_i < 0,02$	$0,02 \leq \Delta T_i < 0,03$	$0,03 \leq \Delta T_i < 0,04$
№	8	9	10	11	12	13	14
$\Delta n_i$							
$\Delta T_i$	$0,04 \leq \Delta T_i < 0,05$	$0,05 \leq \Delta T_i < 0,06$	$0,06 \leq \Delta T_i < 0,07$	$0,07 \leq \Delta T_i < 0,08$	$0,08 \leq \Delta T_i < 0,09$	$0,09 \leq \Delta T_i < 0,10$	
№	15	16	17	18	19	20	
$\Delta n_i$							

Таблиця 1.4 подібна до табл.1.3, але для  $n = 100$ .

9. Знайти вибірковий стандарт середнього (середню квадратичну похибку середнього)  $S_{\langle T \rangle}$  для  $n = 50$  і  $n = 100$  за формулою:

$$S_{\langle T \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_i - \langle T \rangle)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta T_i^2}{n(n-1)}}. \quad (1.4)$$

Для розрахунків скористатися даними табл. 1.1 і 1.2.

Таблиця 1.5

Інтервали відхилень $\Delta T_i$ за номерами №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$\frac{\Delta n_i}{n}$ для $n=50$																					
$\frac{\Delta n_i}{n}$ для $n=100$																					

Зразок гістограми для  $n = 50$  зображений на рис.1.2.

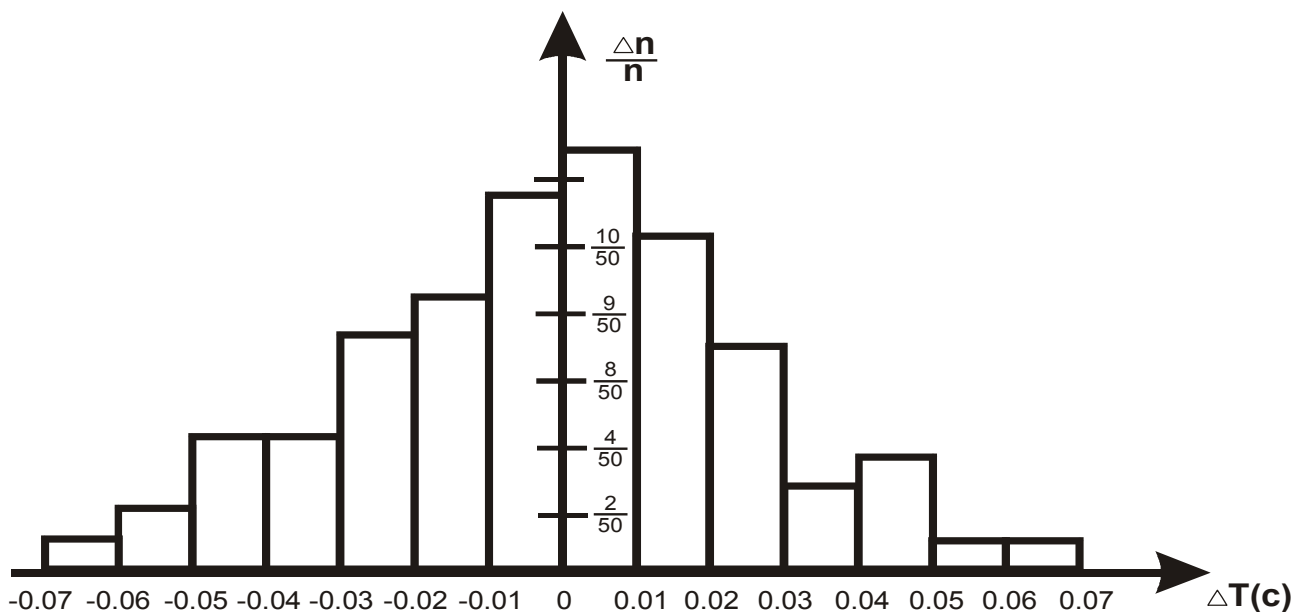


Рис.1.2

10. Вирахувати сумарне стандартне відхилення, зумовлене систематичними похибками, за формулою:

$$\sigma_{\langle T \rangle \Sigma} = \frac{\sigma_{\langle \Delta T \rangle}}{m} = \frac{\delta}{m\sqrt{12}}, \quad (1.5)$$

де  $\delta$  – ціна поділки секундоміра,  $m = 5$  (кількість коливань).

11. Перевірити виконання правила трьох сигм та записати кінцевий результат відповідно до вказівок Додатка I (розд. 5).

## Контрольні запитання

2. Що називається математичним маятником?
3. Які коливання називаються гармонічними?
4. Назвіть типи вимірів.
5. Наведіть класифікацію похибок вимірювань.
6. Як будується гістограма?
7. Вибіркове середнє результатів прямих вимірів.
8. Правило 3-х сигм.
9. За якою формулою можна розрахувати прискорення вільного падіння у даній роботі?
10. Виведіть формули для визначення  $\sigma_{\langle g \rangle \Sigma}$  і  $S_{\langle g \rangle}$ .
11. Розкажіть про закон всесвітнього тяжіння.

Лабораторна робота № 1-2

### Вивчення фізичного маятника

Мета роботи: дослідження законів коливального руху на прикладі фізичного маятника, визначення прискорення сили тяжіння.

Прилади і пристрої: фізичний маятник (однорідний сталевий стержень), лінійка, секундомір.

#### 2.1. Теоретичні відомості

Фізичним маятником називається будь-яке тверде тіло, яке під дією сили тяжіння може вільно коливатись навколо нерухомої горизонтальної осі. У даній роботі фізичним маятником є однорідний сталевий стержень довжиною  $L$ . На стержень нанесено шкалу і закріплено опорну призму, гостре ребро якої є віссю коливання маятника. Переміщуючи призму вздовж стержня, можна змінювати відстань від точки  $O$  підвісу маятника до його центру мас  $C$  (рис.2.1)\*.



Будемо вважати, що моменти сил тертя та опору малі. У цьому випадку рух маятника визначається тільки моментом сили тяжіння

$$M = -mga \cdot \sin\varphi,$$

де  $a$  – відстань ОС від точки підвісу до центру мас,  $\varphi$  – кут відхилення маятника від положення рівноваги. Застосовуючи основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла, отримаємо:

$$J \ddot{\varphi} = -mga \cdot \sin\varphi, \quad (2.1)$$

де  $J$  – момент інерції маятника відносно осі  $O$ ;  $\ddot{\varphi} = d^2 \varphi / dt^2$  – кутове прискорення.

Для малих відхилень від положення рівноваги  $\sin\varphi \approx \varphi$ , і рівняння (2.1) набуде вигляду:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (2.2)$$

з урахуванням позначення  $\omega_0^2 = mga / J$ . Розв'язок цього рівняння добре відомий – це гармонічні коливання з частотою  $\omega_0 = \sqrt{mga / J}$

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (2.3)$$

де  $\varphi_0$  – амплітуда коливань, а  $\alpha$  – початкова фаза. Переконайтесь у цьому підставивши запропонований розв'язок (2.3) у рівняння (2.2).

Амплітуда коливань  $\varphi_0$  і початкова фаза  $\alpha$  залежать від того, як збуджуються коливання маятника, тобто визначаються так званими початковими умовами задачі – початковим кутовим відхиленням  $\varphi(t=0)$  і початковою кутовою швидкістю

$$d\varphi/dt(t=0) = \dot{\varphi}(t=0).$$

Період коливань  $T = 2\pi / \omega_0$  визначається параметрами маятника та прискоренням сили тяжіння  $g$  і дорівнює:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (2.4)$$

---

\* Можливі інші способи підвішування фізичного маятника, які дають можливість змінювати положення точки підвісу, а також такі, що забезпечують малий момент сил тертя.

Позначимо через  $J_0$  момент інерції маятника відносно осі, що

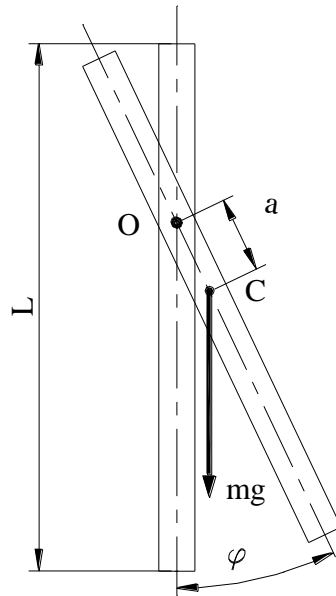


Рис. 2.1. Схема руху маятника

проходить через центр мас  $C$  і паралельна до осі коливань.

Відповідно до теореми Штейнера:

$$J = J_0 + ma^2, \quad (2.5)$$

звідки

$$\dot{\theta} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga} + \frac{a}{g}}. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) дає залежність періоду коливань  $T$  фізичного маятника від відстані “ $a$ ” між точкою підвісу та центром мас.

З’ясуємо поведінку функції  $T(a)$  при дуже великих ( $a \rightarrow \infty$ ) та малих ( $a \rightarrow 0$ ) значеннях “ $a$ ”.

Очевидно, що при  $a \rightarrow \infty$   $T(a) \approx 2\pi \sqrt{a/g}$ , тобто  $T \sim a^{1/2}$ .

Аналогічно, при малих значеннях “ $a$ ”  $T(a) \approx 2\pi \sqrt{J_0/mga}$  або  $T(a) \sim a^{-1/2}$ . У такому випадку кажуть, що при  $a \rightarrow \infty$  період  $T(a) \rightarrow \infty$  як  $a^{1/2}$ ; при  $a \rightarrow 0$  період також прямує до нескінченності, але на цей раз як  $a^{-1/2}$ . Функція (2.6) неперервна на  $(0, \infty)$  і прямує до нескінченності на краях інтервалу.

Відповідно, вона повинна досягати деякого мінімального значення  $a \in (0, \infty)$ . (Дослідіть на екстремум підкореневий вираз у формулі (2.6) і покажіть, що мінімальне значення періоду  $T_{min}$  досягається за умови  $a_0 = \sqrt{J_0 / m}$ ).

Окрім того, формула (2.6) описує залежність  $T(a)$  як для “прямого”, так і для “оберненого” маятника. Усі ці міркування дають змогу дуже просто побудувати графік функції  $T(a)$ , показаний на рис. 2.2. Осі  $T$  на цьому рисунку слід вважати

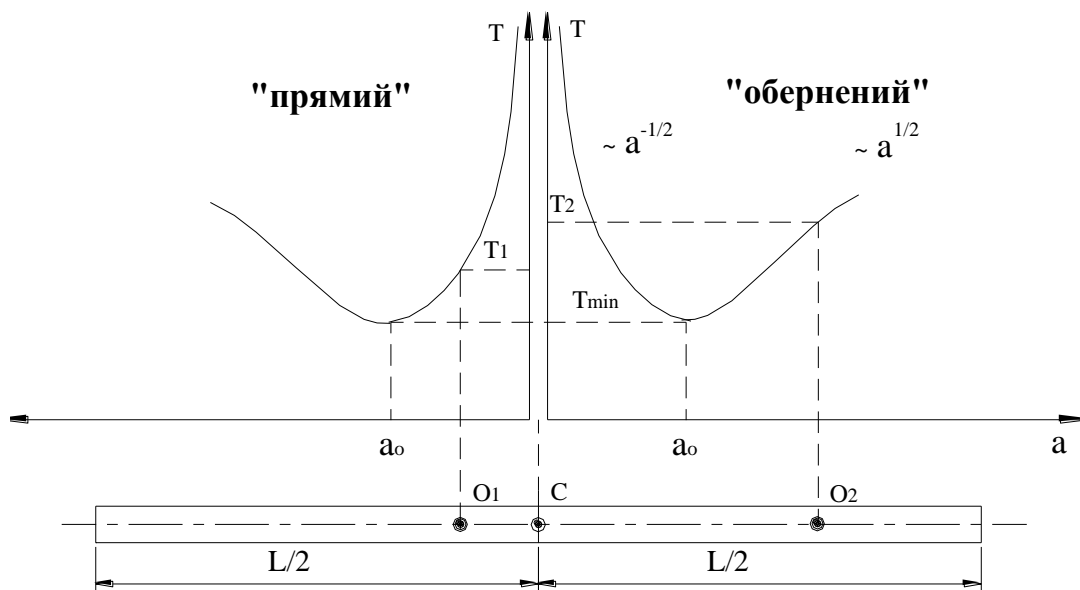


Рис.2.2. Залежність періоду коливань  $T$  фізичного маятника від відстані “ $a$ ” між точкою підвісу та центром мас.

такими, що співпадають. При підвішуванні маятника, наприклад, у точках  $O_1$  і  $O_2$  відповідні періоди дорівнюють  $T_1$  і  $T_2$ . Для прикладу на рисунку зображено маятник-стержень, але, природно, усі отримані результати стосуються будь-якого фізичного маятника.

Для однорідного стержня  $J_0 = mL^2 / 12$ , де  $L$  – довжина маятника, і формулу (2.6) можна переписати в такому вигляді:

$$T^2 a = (4 \pi^2 / g) a^2 + \pi^2 L^2 / 3g . \quad (2.7)$$

Це дає нам можливість спростити експериментальну перевірку теоретичної залежності  $T(a)$ , звівши її до простої лінійної функції у змінних  $T^2 a$  і  $a^2$ . Графік функції  $T^2 a$  від  $a^2$  має вигляд прямої з кутовим коефіцієнтом

$$k = 4 \pi^2 / g. \quad (2.8)$$

Пряма має зсув по осі  $T^2 a$  на величину

$$b = \pi^2 L^2 / 3g, \quad (2.9)$$

як показано на рис.2.3.

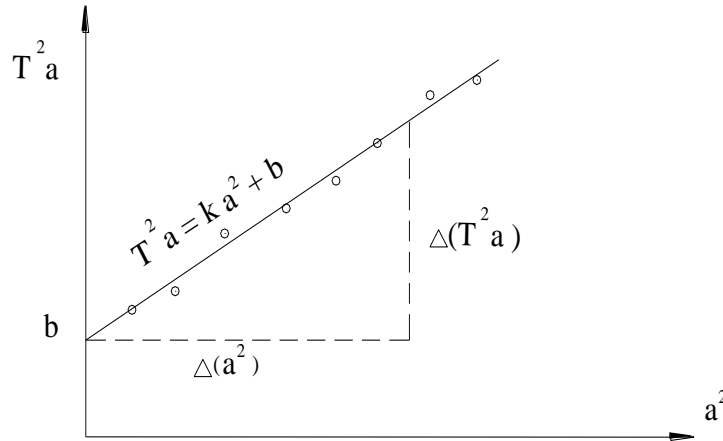


Рис.2.3. Експериментальна перевірка теоретичної залежності  $T(a)$ .

Якщо, з урахуванням похибки експерименту, отримані точки вкладаються на пряму, то це є свідченням справедливості теоретичної залежності (2.6). У цьому випадку через експериментальні точки можна провести найкращу, тобто найбільш близьку до усіх значень  $(T^2 a ; a^2)$  пряму, що дасть можливість визначити кутовий коефіцієнт  $k = (\Delta T^2 a) / (\Delta a^2)$  і прискорення сили тяжіння  $g$  за формулою (2.8). Точками на рис.2.3 зображено експериментальні значення  $(T^2 a ; a^2)$ . Зміщуючи точку підвісу маятника  $O$  і вимірюючи відповідні значення “ $a$ ” і  $T$ , можна зняти експериментальну залежність  $T^2 a$  від  $a^2$ .

## 2.2. Порядок виконання роботи

1. Ознайомтесь з конструкцією фізичного маятника. Визначте положення центра мас маятника, зрівноваживши його на зручній для цього опорі.

2. Закріпіть опорну призму на крайній лівій поділці шкали, тобто на максимальному віддаленні від центру мас; виміряйте за допомогою масштабної лінійки відповідну відстань “ $a$ ”. Приведіть

маятник у коливальний рух таким чином, щоб амплітуда коливань не перевищувала  $10^\circ$  ( $\sin\varphi \approx \varphi$ ). Виміряйте не менше трьох разів час  $t$  10-ти повних коливань і визначте на підставі цих даних середнє значення періоду  $\langle T \rangle$ .

3. Зміщуючи опорну призму через 2-3 поділки шкали, визначте для кожного значення “ $a$ ” середнє значення періоду коливань  $\langle T \rangle$ , відповідно до п.2. Експериментальна залежність  $T(a)$  повинна містити не менше, ніж 14 точок.

4. На підставі отриманих результатів розрахуйте відповідні значення  $T^2 a$  і  $a^2$ . Усі експериментальні дані занесіть до табл.2.1.

5. На аркуші міліметрового паперу побудуйте графік залежності  $T(a)$ ; визначте за графіком  $T_{min}$  та відповідне значення  $a = a_0$ , яке слід порівняти з теоретичним значенням для маятника-стержня:

$$a_0 = \sqrt{J_0/m} = L/\sqrt{12} = 0,29L.$$

6. На аркуш міліметрового паперу нанесіть експериментальні точки  $(T^2 a, a^2)$ ; проведіть пряму, найближчу до усіх точок. Зробіть висновок відносно справедливості теоретичної залежності  $T(a)$ .

7. Визначте кутовий коефіцієнт проведеної прямої  $k = \Delta T^2 a / \Delta a^2$  і значення параметра  $b$  (див. рис.2.3).

8. На підставі формули (2.8) розрахуйте прискорення сили тяжіння  $g$  і порівняйте з табличним значенням. За значенням параметра  $b$  визначте довжину маятника  $L$  та порівняйте з результатом вимірювання довжини маятника за допомогою лінійки (табл.2. 2).

Таблиця 2.1

	$a$ (м)	$T$ (с) = $t/10$	$\langle T \rangle$ (с)	$a^2$ (м <sup>2</sup> )	$\langle T \rangle^2 a$ (с <sup>2</sup> .м)
	...				

Таблиця 2.2

$T_{min} (с) =$	$k (с^2/ м) =$
$a_0 (м) =$	$b (м \cdot с^2) =$
$g_{табл} = 9.8 м / с^2$	$L(м)_{експ} =$
$g_{експ} =$	$L(м)_{вим \cdot лін.} =$
Похибка $\varepsilon = \left\{ \left  g_{експ} - g_{табл} \right  / g_{табл} \right\} \cdot 100\% =$	

### 2.3. Контрольні запитання

1. Виведіть рівняння руху фізичного маятника та запишіть його розв'язок для малих відхилень від положення рівноваги (гармонічні коливання).
2. Покажіть шляхом безпосередньої підстановки, що функція (2.3) є розв'язком диференціального рівняння (2.2).
3. Виведіть формули, що пов'язують амплітуду коливань маятника і початкову фазу з початковими умовами.
4. Сформулюйте та доведіть теорему Штейнера.
5. Виведіть залежність періоду коливань фізичного маятника  $T$  від відстані “ $a$ ” між центром мас і точкою підвісу. Проаналізуйте поведінку функції  $T(a)$  при  $a \rightarrow 0$  та  $a \rightarrow \infty$ . Покажіть, що  $T_{min}$  досягається при  $a_0 = \sqrt{J_0 / m}$ .
6. Як здійснюється експериментальна перевірка теоретичної залежності  $T(a)$ ?
7. Як у даній роботі вимірюється прискорення сили тяжіння?
8. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

## Вивчення динаміки обертального руху за допомогою маятника Обербека

Мета роботи: експериментальна перевірка основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла; визначення моменту інерції системи.

Прилади і пристрої: маятник Обербека, набір тягарців, електронний секундомір, штангенциркуль, масштабна лінійка.

### 3.1. Теоретичні відомості

Наслідком фундаментальних постулатів класичної механіки (законів Ньютона) є основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі

$$J\beta = M_{\Sigma}, \quad (3.1)$$

де  $J$  – момент інерції тіла відносно осі обертання,  $\beta$  – кутове прискорення,  $M_{\Sigma}$  – алгебраїчна сума моментів зовнішніх сил відносно осі обертання. Тому експериментальна перевірка цього рівняння є перевіркою основних положень класичної механіки.

На рис.3.1. показано схему експериментальної установки (маятник Обербека). Вона складається з чотирьох стержнів, закріплених на втулці під прямим кутом один до одного. На ту ж втулку насаджено два шківів різних радіусів  $r_1$  і  $r_2$ . Уздовж стержнів можуть зміщуватися й закріплюватися на різних відстанях  $L$  чотири тягарці однакової маси  $m_0$ , що дає змогу змінювати момент інерції системи. Уся ця конструкція може вільно обертатись навколо горизонтальної осі. На один із шківів намотується нитка із закріпленням на кінці тягарцем маси  $m$ , завдячуючи чому маятник починає обертатися. На тягарець діють сила тяжіння  $mg$  і сила натягу (пружності) нитки  $T$ , як показано на рис.3.1.

За другим законом Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}, \quad (3.2)$$

де  $\vec{a}$  – прискорення тягарця.

Спроектувавши співвідношення (3.2) на напрямок прискорення, отримаємо рівняння руху тягарця:

$$ma = mg - T. \quad (3.3)$$

Відповідно до II закону Ньютона, на шків діє протилежно напрямлена сила  $T$ , момент якої відносно осі обертання дорівнює

$$M = T \cdot r. \quad (3.4)$$

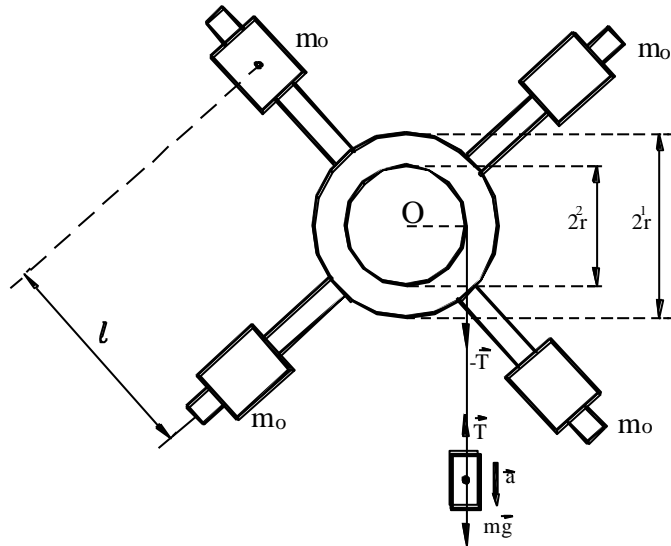


Рис.3.1. Конструкція маятника Обербека

Рівняння руху маятника можна значно спростити, якщо збалансувати маятник, тобто, домогтися, щоб у вільному стані він знаходився у байдужій рівновазі (подумайте, як це здійснити та перевірити). При цьому центр мас системи співпаде з точкою  $O$ , що знаходиться на осі, і момент сили тяжіння відносно цієї осі дорівнюватиме нулю. У такому випадку рух маятника визначається моментом сили натягу нитки  $M$  і моментом сил тертя  $M_{\text{тер}}$ , що дозволяє записати основне рівняння обертального руху (3.1) у такому вигляді:

$$J\beta = M - M_{\text{тер}}. \quad (3.5)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (3.3), (3.4), (3.5) і використовуючи відомий зв'язок між кутовим та лінійним прискоренням

$$\beta = a / r, \quad (3.6)$$

отримаємо:

$$a = (mg r - M_{\text{тер}}) \cdot r / J. \quad (3.7)$$



Момент сил тертя під час руху можна вважати сталим. У такому випадку вираз (3.7) означає, що рух тягарця є рівноприскореним ( $a = \text{const}$ ).

Вимірюючи час  $t$ , за який тягарець із стану спокою спуститься на відстань  $h$ , можна експериментально визначити кутове прискорення маятника. Оскільки  $h = a t^2 / 2$ , то, враховуючи формулу (3.6) для кутового прискорення  $\beta$  маємо:

$$\beta = 2 h / r t^2 \quad (3.8)$$

Момент сили натягу нитки відносно осі обертання можна вивести з (3.3) і (3.4):

$$M = m (g - a) \cdot r \quad (3.9)$$

Зауважимо, що  $\beta$  і  $M$  можна вирахувати, скориставшись рівняннями (3.8) і (3.9), які отримані незалежно від основного рівняння динаміки обертального руху(3.5). Перепишемо рівняння (3.5) у зручному для перевірки вигляді:

$$M = M_{\text{тр}} + J \beta. \quad (3.10)$$

Цей вираз означає, що залежністю  $M(\beta)$  є пряма лінія, кутовий коефіцієнт  $k$  якої чисельно дорівнює моменту інерції системи:

$$J = k = \Delta M / \Delta \beta, \quad (3.11)$$

а точка перетину прямої з віссю  $M$  відповідає моменту сил тертя  $M_{\text{тер}}$ , що ілюструє рис.3.2.

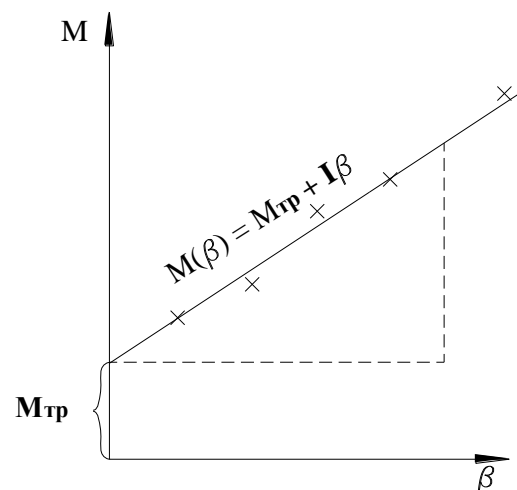


Рис.3.2. На графіку відхилення експериментальних точок ( $M_i, \beta_i$ ) від прямої  $M(\beta) = M_{\text{тер}} + J \beta$  знаходиться в межах похибок експерименту.

Маючи у розпорядженні набір тягарців, можна в достатньо широких межах змінювати масу  $m$ , а , значить, і величини  $M$  і  $\beta$ , тобто зняти експериментальну залежність  $M(\beta)$ . Якщо отримані точки  $(M_i, \beta_i)$  з урахуванням похибки експерименту вкладаються на пряму лінію, то це є свідченням справедливості співвідношення (3.10), отже, і основного рівняння динаміки обертального руху (3.1). У такому випадку через експериментальні точки можна провести пряму, найбільш близьку до усіх  $(M_i, \beta_i)$  і таку, що лежить в межах похибки експерименту. Це дасть змогу визначити момент сил тертя і розрахувати за формулою (3.11) момент інерції системи (див. рис.3.2).

### 3.2. Порядок виконання роботи

1. Ознайомтесь з конструкцією маятника Обербека. Перевірте, чи він достатньо вільно обертається на осі. Переконайтесь, що гвинт, який закріплює втулку, при обертанні маятника не затягується. У протилежному випадку ви не отримаєте узгодження з теорією, бо на рух маятника впливатимуть додаткові сили та їх моменти, і рівняння руху ускладниться.

2. Установіть тягарці  $m_0$  на деякому віддаленні  $L$  від осі обертання ( бажано в першому експерименті цю відстань взяти максимальною  $L = L_{max}$  ) таким чином, щоб маятник знаходився у стані байдужої рівноваги. Переконайтесь, що маятник збалансовано. Для цього кілька разів спробуйте надати йому обертання і дайте можливість зупинитись. Якщо маятник збалансовано, він легко зупинятиметься щоразу в новому положенні та уникне коливального руху навколо положення рівноваги.

3. На шків більшого радіуса ( $r = r_1$ ) намотайте нитку маятника, до кінця якої прикріпіть тягарець масою  $m_1$ . За формулою (3.9) розрахуйте момент сил натягу нитки  $M_1$ . Оскільки  $a \ll g$ , для розрахунку  $M_1$  можна скористатися наближеною формулою:

$$M_1 \approx m_1 g r_1 . \quad (3.12)$$

4. Під час обертання маятника зафіксуйте час  $t$ , за який тягарець масою  $m_1$  пройде висоту  $h$  ( $h = 1\text{ м}$ ). Виміри часу повторіть тричі і визначте середнє значення  $\langle t \rangle$ .

5. За формулою (3.8) розрахуйте кутове прискорення  $\beta_1$ , що відповідає натягу  $M_1$ . Замість  $t$  у формулу підставте  $\langle t \rangle$ . Дані пунктів 3, 4, 5 занесіть до табл. 3.1.

6. Повторіть цей дослід для різних значень (5 – 6) маси  $m$ , додаючи щоразу ще один тягарець. Визначте відповідні значення  $\beta_i$  і  $M_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Усі результати вимірювань занесіть до табл. 1.

7. Виконайте ту саму серію експериментів для шківів меншого радіуса ( $r = r_2$ ) при такому ж значенні  $L = L_{max}$ . Дані занесіть до табл. 3.1.

8. Змініть момент інерції системи, встановивши тягарець  $m_0$  на мінімальному віддаленні від осі обертання  $L = L_{min}$ . Повторіть експерименти, описані у пп. 3 – 6. Дані занесіть до табл. 3.2.

9. Для чотирьох серій вимірів на аркуші міліметрового паперу побудуйте залежність  $M(\beta)$ . Визначте в усіх серіях  $M_{тер}$  і  $J$ . Порівняйте результати. Знайдіть середнє значення  $M_{тер}$  та середні значення  $J_{min}$  і  $J_{max}$ .

10. Для оцінки похибок експерименту скористайтеся формулами, які дає теорія обробки результатів лабораторних вимірювань:

$$(\sigma_\beta/\beta)^2 = (\sigma_h/h)^2 + (\sigma_r/r)^2 + 4(\sigma_t/t)^2, \quad (3.13)$$

$$S_{\langle\beta\rangle}/\beta = 2(S_{\langle t \rangle}/t), \quad (3.14)$$

$$(\sigma_M/M)^2 = (\sigma_m/m)^2 + (\sigma_g/g)^2 + (\sigma_r/r)^2, \quad (3.15)$$

де  $S_{\langle\beta\rangle}$  і  $S_{\langle t \rangle}$  – стандартні вибіркові відхилення відповідних середніх значень;  $\sigma_\beta, \sigma_h, \dots, \sigma_r$  – систематичні похибки  $\beta, h, \dots, r$ .

11. На одному з експериментальних графіків відкладіть величини

$$\sigma_{\langle\beta\rangle} = \sqrt{S_{\langle\beta\rangle}^2 + \sigma_\beta^2} \quad \text{та} \quad \sigma_M,$$

які характеризують похибки експерименту так, як показано на рис.3.2. Зробіть висновок відносно справедливості рівняння (3.10) у межах похибки експерименту.

Таблиця 3.1

$L = L_{max}$										
I	$r = r_1 = \dots \dots \dots$ (м)					$r = r_2 = \dots \dots \dots$ (м)				
	$m$ (кг), $\cdot 10^{-3}$	$M_i$ (Н·м)	$t_1, t_2,$ $t_3$	$\langle t_i \rangle$ (с)	$\beta_i$ (рад/с <sup>2</sup> )	$m$ (кг), $\cdot 10^{-3}$	$M_i$ (Н·м)	$t_1, t_2,$ $t_3$	$\langle t_i \rangle$ (с)	$\beta_i$ (рад/с <sup>2</sup> )
1										
...										
$M_{тер} = \dots \dots \dots$ (Н·м)					$M_{тер} = \dots \dots \dots$ (Н·м)					
$J_{max} = \dots \dots \dots$ (кг·м <sup>2</sup> )					$J_{max} = \dots \dots \dots$ (кг·м <sup>2</sup> )					

Таблиця 3.2 має такий самий вигляд, як і табл.3.1 і заповнюється з дослідів, де  $L = L_{min}$ . З двох таблиць визначаємо середні значення моментів інерції та момент сили тертя:

$$\langle J_{max} \rangle = \dots \dots \dots; \quad \langle J_{min} \rangle = \dots \dots \dots; \quad \langle M_{тер} \rangle = \dots \dots \dots$$

### Розрахунки похибок експерименту

Необхідно розрахувати систематичні похибки окремих вимірів, випадкові похибки середніх значень (вибірковий стандарт середнього) та відносні похибки визначення  $\beta$  і  $M$ :

$$\begin{aligned} &\sigma_t, \sigma_m, \sigma_g, \sigma_\beta, \sigma_h, \sigma_r, \sigma_M; \\ &\sigma_{\langle \beta \rangle \Sigma}, S_{\langle t \rangle}, S_{\langle \beta \rangle}; \\ &S_{\langle \beta \rangle} / \beta, \sigma_M / M, \sigma_\beta / \beta. \end{aligned}$$

Для ознайомлення з теорією обробки результатів вимірювань скористайтеся Додатком до роботи 1.1

### **3.4. Контрольні запитання**

1. Момент сил і момент імпульсу системи матеріальних точок відносно деякого початку (точки  $O$ ). Зв'язок між ними – рівняння моментів для системи матеріальних точок.

2. Закон збереження моменту імпульсу для системи матеріальних точок.

3. Момент імпульсу й момент сил відносно деякої осі. Рівняння моментів відносно цієї осі.

4. Момент інерції твердого тіла відносно нерухомої осі обертання. Теорема Штейнера. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

5. Як у роботі визначається момент інерції маятника? Від чого він залежить?

6. Як за графічною залежністю  $M(\beta)$  визначити момент сил тертя?

7. Як оцінити похибки експерименту?

Лабораторна робота № 1-4

### **Визначення прискорення сили тяжіння за допомогою перекидного маятника**

Мета роботи: вивчення перекидного маятника, визначення прискорення сили тяжіння.

Прилади і пристрої: перекидний маятник, електронний секундомір, вимірювальна лінійка.

#### **4.1. Теоретичні відомості**

Фізичним маятником називається тверде тіло, яке під дією сили тяжіння здатне коливатись навколо горизонтальної осі

(рис.4.1). Точка  $O$  перетину вертикальної площини, що проходить через центр мас маятника  $C$ , з горизонтальною віссю називається точкою підвісу. Відхилення маятника від положення рівноваги характеризується кутом  $\varphi$ .

Будемо вважати, що моменти сил тертя та опору незначні. В цьому випадку рух маятника визначається лише моментом сили тяжіння

$$M = -mga \sin\varphi,$$

де “ $a$ ” – відстань  $OC$  від точки підвісу до центру мас.

Застосовуючи основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла, матимемо:

$$J\ddot{\varphi} = -mga \sin\varphi, \quad (4.1)$$

де  $J$  – момент інерції маятника

відносно осі  $O$ ,  $\ddot{\varphi} = d^2\varphi/dt^2$  – кутове прискорення.

Для малих відхилень від положення рівноваги  $\sin\varphi \approx \varphi$ , тому рівняння (4.1) набуде наступного вигляду:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (4.2)$$

з урахуванням позначення

$$\omega_0^2 = mga / J.$$

Розв’язок цього рівняння добре відомий – це гармонічні коливання

з частотою  $\omega_0 = \sqrt{mga/J}$ :

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.3)$$

де  $\varphi_0$  – амплітуда коливань,

$\alpha$  – початкова фаза.

Період коливань фізичного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (4.4)$$

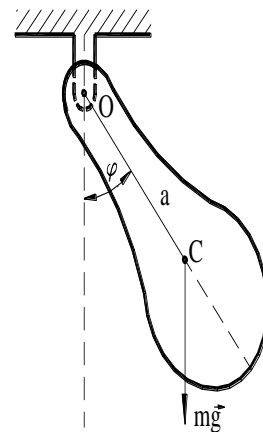


Рис. 4.1.Схема руху маятника

Позначимо  $J_0$ , як момент інерції маятника відносно осі, що проходить через центр мас  $C$  і паралельна до осі качання. Відповідно до теореми Штейнера,

$$J = J_0 + ma^2, \quad (4.5)$$

звідки

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J + ma^2}{mga}}. \quad (4.6)$$

Формулу (4.6), що виражає залежність періоду коливань  $T$  фізичного маятника від відстані “ $a$ ” між точкою підвісу та центром мас, зручно подати у такому вигляді:

$$T(a) = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{mga} + \frac{a}{g}},$$

що дозволяє з'ясувати поведінку функції  $T(a)$  при великих ( $a \rightarrow \infty$ ) і малих ( $a \rightarrow 0$ ) значеннях “ $a$ ”. Очевидно, що при  $a \rightarrow \infty$

$$T(a) \approx 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}, \text{ тобто } T(a) \sim a^{1/2}. \text{ Для малих значень “} a \text{” } T(a) \sim a^{-1/2}.$$

У цьому випадку кажуть, що при  $a \rightarrow \infty$  період  $T(a) \rightarrow \infty$ , як  $a^{1/2}$ ; при  $a \rightarrow 0$  період також прямує до нескінченності, але на цей раз, як  $a^{-1/2}$ .

Функція (4.6) неперервна на  $(0, \infty)$  і прямує до нескінченності на краях інтервалу. Відповідно, вона повинна досягати деякого мінімального значення  $T_{min}$  за  $a \in (0, \infty)$ . Окрім того, формула (4.6) описує залежність  $T(a)$  як для “прямого”, так і для “оберненого” маятника. З огляду на ці міркування можна дуже просто побудувати графік функції  $T(a)$ , показаний на рис. 4. 2.

Формула (4.6) дає можливість експериментально визначити прискорення сили тяжіння. Дійсно, підвішуючи маятник на різних відстанях  $a_1$  і  $a_2$  від центру мас, можна виміряти відповідні періоди коливань  $T_1$  і  $T_2$ . Використовуючи співвідношення (4.6), отримаємо систему рівнянь:

$$T_1^2 = 4 \pi^2 [(J_0 + ma_1^2) / mga_1],$$

$$T_2^2 = 4 \pi^2 [(J_0 + ma_2^2) / mga_2].$$

Якщо з рівнянь виключити  $J_0$ , то отримаємо:

$$g = 4 \pi^2 [(a_1^2 - a_2^2) / (a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2)] \quad (4.7)$$

Осі  $T$  слід вважати співпадаючими:  $a_1 = a_1'$ ;  $a_2 = a_2'$ . Одне і те ж саме значення періоду  $T$  (за умови  $T > T_{min}$ ) досягається під час підвішування маятника в точках  $O_1, O_2, O_1', O_2'$ .

Однак формулу (4.7) можна значно спростити. Припустимо, що нам вдалося знайти положення точок  $O_2$  і  $O_1'$ , розташованих по різні боки від центру мас (див. рис.4.2). У такому випадку  $T_1 = T_2 = T$ , і формула (4.7) набирає простішого вигляду:

$$g = 4 \pi^2 \ell / T^2, \quad (4.8)$$

де  $\ell = a_1' + a_2$ .

Усі величини, що входять до формули (4.8), можуть бути легко виміряні з великим ступенем точності. Найбільшою складністю є визначення точок підвісу, в яких періоди “прямого” і “оберненого” маятників практично співпадають (звідси назва – перекидний).

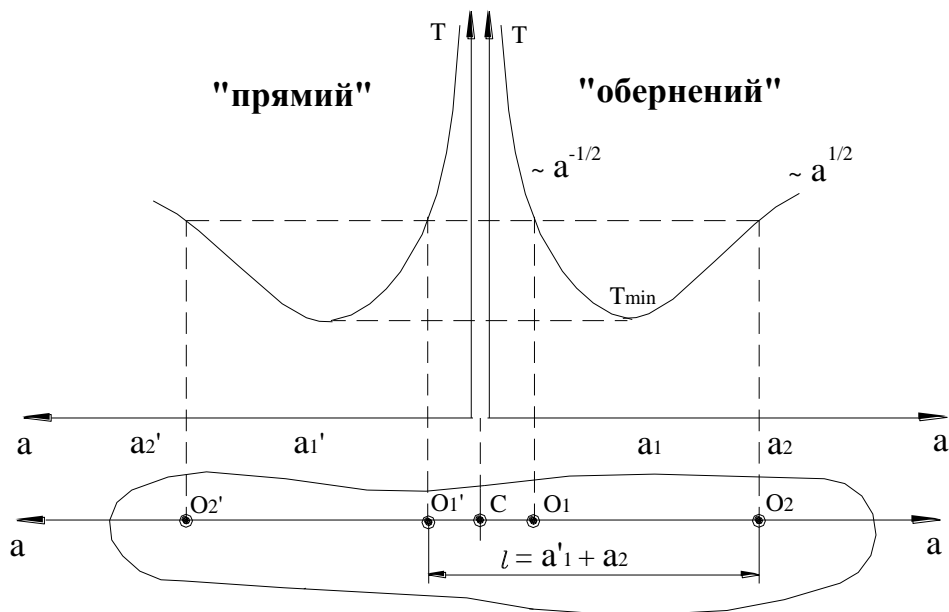


Рис.4.2. Залежність періоду коливань  $T$  фізичного маятника від відстані “ $a$ ” між точкою підвісу й центром мас.

Існує багато різноманітних конструкцій перекидного маятника, одна з яких зображена на рис.4.3. На сталевому стержні закріплено дві опорні призми ( $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ ) і тягарці ( $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ ), переміщуючи які,



можна у досить широких межах змінювати період. Нанесені на поверхню стержня шкали визначають положення рухомих елементів конструкції. Їх вплив на періоди  $T_1$  і  $T_2$  ілюструє рис.4.4. Видно, що переміщення  $\Pi_2$  більше впливає на період  $T_2$ , ніж переміщення  $\Pi_1$  на  $T_1$ . При цьому положення центра мас майже не змінюється, оскільки призми досить легкі. Однак невеликий зсув тягарця  $\Gamma_2$  у напрямку стрілки призводить до значного зміщення центра мас  $C$ . Це означає, що відстань  $a_2$  збільшується, а  $a_1$  на стільки ж зменшується. Обидва періоди зменшуються, однак  $T_2$  значно швидше, завдяки чому їх можна вирівняти. Розглянемо ситуацію, коли в початковий момент  $T_1 > T_2$ .

Які тягарці необхідно переміщувати і в який бік, щоб вирівняти періоди? Чи можна це зробити? Переміщення тягарців змінює обидва періоди  $T_1$  і  $T_2$  в один і той же самий бік, чи в різні?

Періоди  $T_1$  і  $T_2$  можна так вирівняти, що їх різниця буде перебувати в межах випадкового розкиду результатів повторних вимірювань. Це дає змогу розглядати набір значень  $T_1$  і  $T_2$  як єдиний набір  $T$  та розрахувати відповідне середнє значення  $\langle T \rangle$  і вибірковий стандарт середнього  $S_{\langle T \rangle}$ . Фактично ми розглядаємо  $T_1 - T_2$ , як випадкову похибку. Розглянемо, як випадкова похибка вимірювання позначиться на похибці  $g$ . Для цього слід скористатися формулою (4.7) замість (4.8), яка не враховує відмінностей у періодах. Відповідний розрахунок приводить до такого результату:

$$S_{\langle g \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T_1} S_{\langle T \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_2} S_{\langle T \rangle}\right)^2} = \frac{8\pi^2 l \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{|a_1 - a_2| \cdot T^3} S_{\langle T \rangle},$$

де  $S_{\langle g \rangle}$  - вибірковий стандарт середнього значення  $g$ . Вираз для відносної похибки виглядає зовсім просто:

$$\frac{S_{\langle g \rangle}}{g} = \frac{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{|a_1 - a_2|} \frac{S_{\langle T \rangle}}{T}. \quad (4.9)$$

Аналогічно розраховується систематична відносна похибка:

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \frac{4(a_1^2 + a_2^2)}{(a_1 - a_2)^2} \left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2}, \quad (4.10)$$

де  $\sigma_l$ ,  $\sigma_T$ ,  $\sigma_\pi$  – систематичні похибки величин  $l$ ,  $T$  і  $\pi$ .

Ці вирази показують, що відносні похибки  $\frac{S_{\langle g \rangle}}{g}$  та  $\frac{\sigma_g}{g}$  необмежено зростають, якщо різниця  $a_1 - a_2$  прямує до нуля, тобто якщо  $T \rightarrow T_{min}$  (рис.4. 2). Тому планувати експеримент слід так, щоб  $a_1$  і  $a_2$  відрізнялись одне від одного досить вагомо. Неважко, однак, показати, що при значній відмінності  $a_1$  і  $a_2$  зростає затухання коливань, що призводить до пониження точності вимірювання періоду. Задовільні результати можна отримати, якщо вибрати

$$3 > a_1 / a_2 > 1.5$$

## 4.2. Порядок виконання роботи

1. Ознайомтесь з конструкцією перекидного маятника. Тягарець  $\Gamma_2$  розмістіть якнайближче до призми  $\Pi_2$ .
2. Приведіть маятник у коливальний рух на одній з опорних призм так, щоб амплітуда коливань не перевищувала  $10^\circ$ . Період обчислюють за часом 10-ти коливань. При цьому не обов'язково щоразу визначати значення самих періодів, достатньо вимірювати час 10-ти коливань  $t_1$  і  $t_2$  при коливаннях на призмах  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  відповідно.
3. Переміщуючи тягарець  $\Gamma_2$  вздовж шкали, нанесеної на стержні, з кроком 1–2 поділки, виміряйте не менше трьох разів кожне з  $t_1$  і  $t_2$ ; визначте відповідне кожній новій позиції  $\Gamma_2$  середні значення  $\langle t_1 \rangle$  і  $\langle t_2 \rangle$ . Результати вимірювань занесіть до табл. 1. На аркуші міліметрового паперу побудуйте графіки залежності середніх значень  $\langle t_1 \rangle$  і  $\langle t_2 \rangle$  від  $n$ , де  $n$  – поділка шкали. Точка перетину цих кривих визначить оптимальне положення тягарця  $\Gamma$ , при якому значення періодів  $T_1$  і  $T_2$  будуть найбільш близькими. Точку перетину позначте  $n_0$ .

4. Прилаштуйте маятник на призму  $\Pi_2$ , а тягарець  $\Gamma_2$  закріпіть у положенні  $n_0$ . Прилаштуйте маятник у коливальний рух з відхиленням у межах кута  $10^\circ$  і виміряйте час  $t$  50-ти коливань. Вимірювання проведіть тричі.
5. Підвісьте маятник на призму  $\Pi_1$ , не змінюючи положення тягарця. Повторіть вимірювання часу 50-ти коливань (три серії вимірів) (див. п. 4). Дані пп. 4, 5 занесіть до табл.4.2.
6. Для кожної з шести серій вимірювань визначте значення періоду коливань  $T$ . Знайдіть середнє значення періоду  $\langle T \rangle$ .

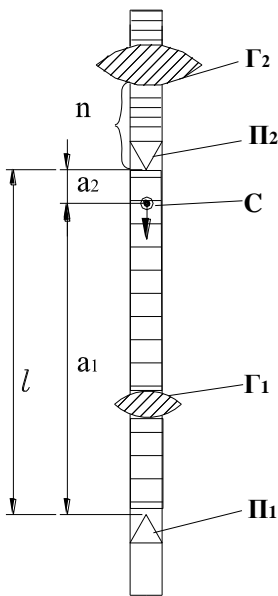


Рис.4. 3. Конструкція перекидного маятника

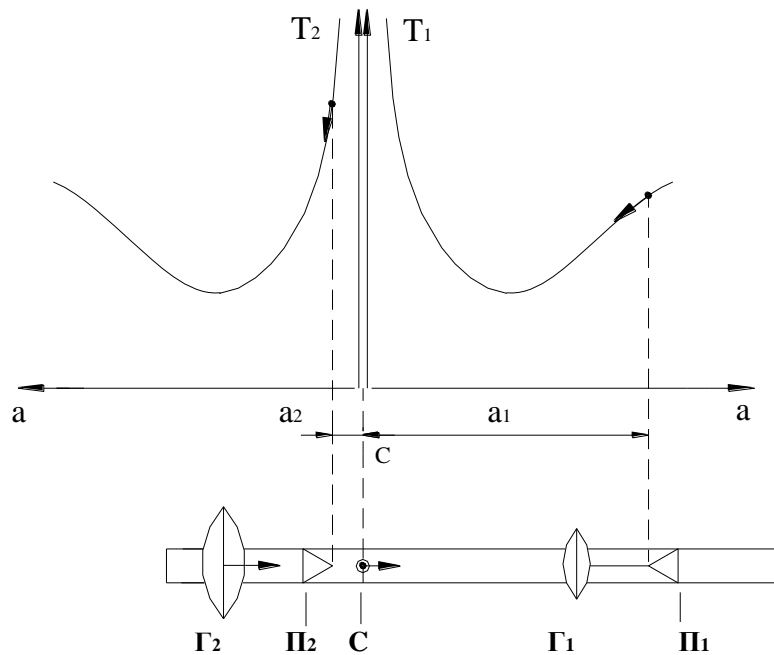


Рис.4.4. Вплив переміщення різних елементів перекидного маятника на значення періодів  $T_1$  і  $T_2$ ;  $C$  – центр мас;  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  – рухомі опорні призми;  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  – рухомі тягарці.



7. Виміряйте параметр  $\ell$  – відстань між призмами  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ .
8. За формулою (4.8) визначте прискорення вільного падіння  $\langle g \rangle$ , підставляючи замість  $T$  його середнє значення  $\langle T \rangle$ .
9. Використовуючи вирази (4.9) і (4.10), оцініть похибку визначення  $\langle g \rangle$ .

Таблиця 4.1

На $\Pi_1$			На $\Pi_2$	
$n$	$t_1, \text{с}$	$\langle t_1 \rangle, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$\langle t_2 \rangle, \text{с}$
1				
...				

Таблиця 4.2

	Час 50-ти коливань, с	Період $T, \text{с}$	$T_i - \langle T \rangle,$ с	$(T_i - \langle T \rangle)^2,$ с
$n$	Призма $\Pi_1$			
1				
...				
	Призма $\Pi_2$			
1				
...				
$\langle T \rangle = \left( \sum_{i=1}^6 T_i \right) / 6 =$			$\sum_{i=1}^6 (T_i - \langle T \rangle)^2 =$	

Параметри розрахунків:

$$\ell (\text{м}) = \dots; \quad a_1 (\text{м}) = \dots; \quad a_2 (\text{м}) = \dots;$$

$$\sigma_l (\text{м}) = \dots; \quad \sigma_T (\text{с}) = \dots; \quad \sigma_\pi = \dots;$$

Визначення похибок:

$$S_{\langle T \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (T_i - \langle T \rangle)^2}{6 \cdot 5}} = \dots\dots\dots;$$

$$(S_{\langle g \rangle} / g) \cdot 100\% = \dots\dots\dots; \quad (\sigma_{\langle g \rangle} / g) \cdot 100\% = \dots\dots\dots$$

Записати остаточний результат:

$$\langle g \rangle = \dots\dots\dots;$$

$$S_{\langle g \rangle} = \dots\dots\dots;$$

$$\sigma_{\langle g \rangle} = \dots\dots\dots$$

### 4.3. Контрольні запитання

1. Момент сил і момент імпульсу системи матеріальних точок відносно деякого початку (точки O). Зв'язок між ними – рівняння моментів для системи матеріальних точок.
2. Закон збереження моменту імпульсу для системи матеріальних точок.
3. Момент імпульсу і момент сил відносно деякої осі. Рівняння моментів відносно цієї осі.
4. Момент інерції твердого тіла відносно нерухомої осі обертання. Теорема Штейнера. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.
5. Рівняння руху фізичного маятника. Його розв'язок для малих відхилень від положення рівноваги – гармонічні коливання.
6. Залежність періоду коливань T фізичного маятника від відстані “a” між центром мас і точкою підвісу.
7. Метод вимірювання прискорення сили тяжіння g за допомогою перекидного маятника.
8. Як слід планувати експеримент, щоб забезпечити мінімальну похибку у вимірюванні g?
9. Дайте відповіді на запитання, які пропонуються в тексті.

## Література до лабораторних робіт

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. “Техніка”, К.,1999.
1. Савельев И. В. Курс общей физики. В 3 т. Т.1.– М. : Наука, 1977.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. – М. : Наука, 1974.
3. Руководство к лабораторным занятиям по физике /Под ред. Л.Л. Гольдина . – М.: Наука, 1973.с.

## Додаток І

### Теорія похибок і обробка результатів вимірювань у фізичній лабораторії

#### 1. Вимірювання фізичних величин

Виміром називають послідовність експериментальних операцій для знаходження фізичної величини, що характеризує об'єкт чи явище. Виміряти – значить порівняти вимірювану величину з іншою, однорідною з нею величиною, прийнятою за одиницю вимірювання.

Завершується вимірювання визначенням ступеня наближення знайденого значення до істинного або до істинного середнього.

Істинним середнім характеризуються величини, що носять статистичний характер, наприклад, середній зріст людини, середня енергія молекул газу тощо. Такі ж параметри, як маса тіла або його об'єм, характеризуються істинним значенням. У цьому випадку можна говорити про ступінь наближення знайденого середнього значення фізичної величини до її істинного значення.

Виміри можуть бути як прямими, коли шукану величину знаходять безпосередньо за дослідними даними, так і непрямыми, коли остаточну відповідь на запитання знаходять через відомі залежності між фізичною величиною, що нас цікавить, і

величинами, які можна отримати експериментально через прямі виміри.

## 2. Похибки вимірювань

Недосконалість вимірювальних приладів і органів відчуття людини, а часто – і природа самої вимірюваної величини призводять до того, що результат при будь-яких вимірах отримують з певною точністю, тобто експеримент дає не істинне значення вимірюваної величини, а наближене.

Точність вимірювання визначається близькістю цього результату до істинного значення вимірюваної величини або до істинного середнього. Кількісною мірою точності вимірювання служить похибка вимірювання. Загалом вказують абсолютну похибку вимірювання.

Абсолютною похибкою даного вимірювання  $x$  називається різниця між її вимірним значенням  $x_i$  та істинним значенням цієї величини:

$$\Delta x_1 = x_1 - x.$$

У досліді істинне значення вимірюваної величини  $x$  невідомо наперед, тому абсолютну похибку відносять до середнього значення  $\langle x \rangle$  і знаходять за формулою:

$$\Delta x_1 = x_1 - \langle x \rangle.$$

Абсолютна похибка  $\Delta x_1$  має ту саму розмірність, що і вимірювана величина  $x$ . Вона може бути як додатною, так і від'ємною.

Відносною похибкою виміру називають модуль відношення абсолютної похибки до істинного значення вимірюваної величини

$$\varepsilon = \left| \frac{\Delta x}{x} \right|. \quad (1)$$

Відносна похибка – величина безрозмірна, переважно виражається у відсотках або в частках одиниці. Зі співвідношення (1) виходить, що

$$|\Delta x| = \varepsilon |x|.$$

## Основні типи похибок вимірювань



1. Грубі похибки (промахи) виникають в результаті недбалості або неуважності експериментатора. Наприклад, відлік вимірюваної величини випадково проведено без необхідних приладів, невірно прочитана цифра на шкалі тощо. Цих похибок легко уникнути.

2. Випадкові похибки виникають через різні причини, дія яких різна в кожному з дослідів, вони не можуть бути передбачені заздалегідь. Ці похибки підкоряються статистичним закономірностям і враховуються за допомогою методів математичної статистики.

3. Систематичні похибки з'являються внаслідок хибного методу вимірювання, несправності приладів тощо  $-\sigma_{\text{ін}}^2$ . Один з видів систематичних похибок – похибки приладів, що визначають точність вимірювання приладів –  $\sigma_{\text{ін}}^2$ . При зчитуванні результату вимірювань є неминучим округлення, яке пов'язане з ціною поділки  $i$ , відповідно, точністю приладу. Це призводить до появи похибки округлення –  $\sigma_{\text{ін}}^2$ . Цих видів похибок неможливо уникнути і вони повинні бути враховані поряд із випадковими похибками.

У запропонованих методичних вказівках наведено кінцеві формули теорії похибок, необхідні для математичної обробки результатів вимірювань.

## 2. Визначення інтервалу довіри для прямих вимірів

Розглянемо правила обробки результатів вимірювань за наявності лише випадкових похибок.

Нехай у фізичному експерименті проводять  $n$  прямих вимірів деякої величини  $x$  і дістають значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Сукупність цих значень називається вибіркою з нескінченно великого ряду значень, котрі могла б прийняти випадкова величина  $x$ . При великому числі вимірів ближче усього до істинного значення величини  $x$  лежить середнє арифметичне результатів вимірювання  $\langle x \rangle$ , яке визначається таким чином:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2)$$

й у теорії називається вибірковим середнім.

Відхилення окремих значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  від вибіркового середнього  $\langle x \rangle$  називаються абсолютними похибками результатів окремих вимірювань:

$$\Delta x_1 = x_1 - \langle x \rangle;$$

$$\Delta x_2 = x_2 - \langle x \rangle;$$

.....

$$\Delta x_n = x_n - \langle x \rangle.$$

Для оцінки відхилення вибіркового середнього  $\langle x \rangle$  від істинного значення вимірюваної величини вводиться середня квадратична похибка середнього  $S_{\langle x \rangle}$ , яка визначається так:

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (3)$$

З формули (3) видно, що точність знаходження середнього значення можна підвищити, збільшуючи число  $n$ , оскільки  $S_{\langle x \rangle}$  зменшується, взагалі, зі зростанням  $n$ . Однак необхідно врахувати, що коли  $S_{\langle x \rangle}$  стане меншим за сумарну систематичну похибку, подальше збільшення  $n$  не призведе до підвищення точності результату. В такому випадку точність вимірювань буде визначатися систематичними похибками. Тому на практиці число  $n$  невелике – від 3 до 10. З кінцевого числа вимірювань неможливо точно знайти істинне (або теоретичне середнє) значення вимірюваної величини  $x$ . Завдання вимірювання – оцінити величину  $x$ , тобто вказати інтервал значень, до якого із заданою ймовірністю довіри  $\alpha$  (іноді використовують іншу назву  $\alpha$  – коефіцієнт надійності) потрапляє вимірювана величина  $x$ .

Позначимо через  $\beta_1$  і  $\beta_2$  межі інтервалу, що визначаються таким чином:

$$\beta_1 = \langle x \rangle - \Delta x_{\text{вм}} ;$$

$$\beta_2 = \langle x \rangle + \Delta x_{\text{вм}} , \quad (4)$$

де  $\Delta x_{\text{вм}} = \Delta x_{\text{вм}} ; \Delta x_{\text{вм}} -$  напівширина інтервалу довіри :

$$\Delta x_{\text{вм}} = t_{\alpha, n} \cdot S_{\langle x \rangle} ; \quad (5)$$

$t_{\alpha, n}$  – коефіцієнт Стюдента, який залежить від імовірності довіри  $\alpha$  та числа вимірів  $n$  (див. табл. 1).

Запис

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2 \quad (6)$$

означає, що шукана величина  $x$  буде знаходитись з імовірністю  $\alpha$  (наприклад,  $\alpha=0,8$  або 80%) в інтервалі значень від  $\beta_1$  до  $\beta_2$ . Ширина цього інтервалу –  $2 \Delta x_{\text{вм}}$  (див. рис.1).

Якщо використати (4) – (6), можна записати:

$$\langle x \rangle - t_{\alpha, n} \cdot S_{\langle x \rangle} \leq x \leq \langle x \rangle + t_{\alpha, n} \cdot S_{\langle x \rangle} ,$$

або з імовірністю  $\alpha$

$$x = \langle x \rangle \pm t_{\alpha, n} \cdot S_{\langle x \rangle} . \quad (7)$$

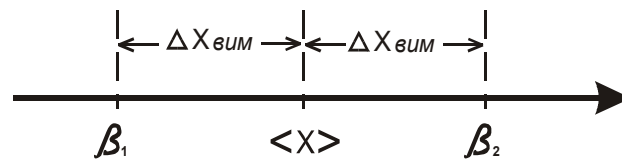


Рис. 1.

Формула (7) є кінцевою формулою запису результату при проведенні прямих вимірювань за умови переважання випадкових похибок над систематичними.

Таблиця 1

Імовірність довіри $\alpha$	Кількість вимірів $n$													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	60	100
0,8		3,08	1,89	2,35	1,53	1,48	1,44	1,42	1,40	1,38	1,33	1,30	1,30	1,29
0,9		6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,89	1,86	1,73	1,73	1,68	1,67	1,66
0,95		12,7	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,09	2,02	2,00	1,98

Розглянемо приклад розрахунку напівширини інтервалу довіри за заданим коефіцієнтом надійності  $\alpha$ .

Нехай вимірювання деякого проміжку часу  $\tau$  повторено три рази ( $n=3$ ). Розрахована за формулою (3) похибка середнього виявилась рівною  $S_{\langle\tau\rangle} = 0,1$  с, а середнє значення  $\langle\tau\rangle = 2,3$  с. Якою повинна бути напівширина інтервалу довіри  $\Delta\tau$ , щоб коефіцієнт надійності  $\alpha = 0,8$ ?

У табл.1 на перетині стовпчика  $n=3$  і рядка  $\alpha = 0,8$  знаходимо значення коефіцієнта Стюдента  $t_{\alpha,n} = t_{0,8;3} = 1,89$ .

Остаточна відповідь:  $\Delta\tau = t_{\alpha,n} \cdot S_{\langle\tau\rangle} = (1,89 \times 0,1)$  с.

### 3. Розрахунок середньої квадратичної похибки при непрямих вимірюваннях

Припустимо, що у фізичному експерименті шукану величину знаходять непрямим шляхом, тобто використовують певну функціональну залежність

$$y = f(a, b, c, \dots), \quad (8)$$

яка називається розрахунковою або робочою формулою.

Наприклад, при вирахуванні густини речовини за відомою масою та об'ємом робоча формула має вигляд:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Похибка у вимірюванні “ $y$ ” залежить від похибок, допущених у прямих вимірюваннях величин  $a, b, c \dots$ . Передбачаючи, що похибки  $a, b, c \dots$  за абсолютним значенням значно менші самих величин, можна на підставі (8) отримати за допомогою диференціального числення вираз для середньої квадратичної похибки вимірювання величини “ $y$ ”:

$$S_{\langle y \rangle} = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial a} \bigg|_{\substack{a = \langle a \rangle \\ b = \langle b \rangle \\ \dots}} \right)^2 S_{\langle a \rangle}^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial b} \bigg|_{\substack{a = \langle a \rangle \\ b = \langle b \rangle \\ \dots}} \right)^2 S_{\langle b \rangle}^2 + \dots} \quad (9)$$

Отже, для розрахунку середньої квадратичної похибки вимірювання величини “у” необхідно врахувати частинні похідні, враховуючи функціональну залежність від безпосередньо вимірюваних величин.

Послідовність розрахунку шуканої величини “у”  
при непрямих вимірюваннях.

1. Виміряти незалежні величини  $a, b, c, \dots$ , що входять до робочої формули (8), і визначити вибіркові середні значення величин  $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \dots$ . Після цього, підставивши значення  $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \dots$  у формулу (8), визначити вибіркове середнє значення величини “у” :

$$\langle y \rangle = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \dots)$$

2. За допомогою виразу (3) знайти середні квадратичні похибки  $S_{\langle a \rangle}, S_{\langle b \rangle}, S_{\langle c \rangle}, \dots$  і використати їх для визначення  $S_{\langle y \rangle}$  (9).

3. Як і для прямих вимірів, кінцевий результат записується у вигляді, аналогічному (7) :

$$y = \langle y \rangle \pm t_{\alpha, n} S_{\langle y \rangle} \text{ з імовірністю } \alpha.$$

Коефіцієнт Стьюдента для даного числа вимірів  $n$  і заданої імовірності довіри  $\alpha$  знаходимо за табл. 1.

#### 4. Оцінка систематичної похибки

Сумарну систематичну похибку  $\sigma_{\Sigma}$  (сумарне стандартне відхилення) оцінюють за формулою

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_{\text{I} \delta}^2 + \sigma_{\text{I} \epsilon \delta}^2 + \sigma_{\text{I} \alpha \delta}^2 + \sigma_{\text{I} \rho \alpha}^2 + \dots} \quad (10)$$

Похибка  $\sigma_{i\delta} = \frac{\Delta}{3}$ , де  $\Delta$  - максимальна похибка, вказана у паспорті приладу. Для електровимірювальних приладів  $\Delta = r \cdot A_m \cdot 10^{-2}$ , де  $r$  - клас точності приладу,  $A_m$  - номінальне значення вимірюваної величини ("розмах шкали"). Максимальну похибку  $\Delta$  можна також оцінити за ціною поділки  $\delta$  шкали приладу  $\Delta = \frac{1}{2} \delta$  або остаточно  $\sigma_{i\delta} = \frac{\delta}{6}$ . Для приладів із цифровим табло  $\Delta$  дорівнює половині одиниці найменшого розряду. Похибка зчитування зі шкали  $\sigma_{i\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{12}}$ .

Окрім  $\sigma_{i\delta}$  і  $\sigma_{i\delta}$ , до  $\sigma_{\Sigma}$  входить також похибка методики  $\sigma_{i\delta}$  тощо. У виразі (10) можна знехтувати тими складовими, значення яких не перевищує 30 % максимальної з похибок.

Якщо проаналізувати питання про  $\sigma_{i\delta}$ ,  $\sigma_{i\delta}$  і  $\sigma_{i\delta}$ , то виявиться, що останньою з них можна знехтувати, оскільки в навчальній лабораторії, як правило, використовуються добре відпрацьовані методики, які дають малі  $\sigma_{i\delta}$ . Оскільки  $\sigma_{i\delta}$  менша за  $\sigma_{i\delta}$ , то для оцінки сумарного стандартного відхилення використовують  $\sigma_{i\delta}$ :

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_{i\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{12}} \quad (11)$$

Сумарне стандартне відхилення  $\sigma_{\langle \delta \rangle \Sigma}$  непрямих вимірів величини "у" розраховується за формулою, аналогічною (8):

$$\sigma_{\langle y \rangle \Sigma} = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial a} \bigg|_{a=\langle a \rangle} \right)^2 \sigma_{\langle a \rangle \Sigma}^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial b} \bigg|_{b=\langle b \rangle} \right)^2 \sigma_{\langle b \rangle \Sigma}^2 + \dots} \quad (12)$$

Якщо у формулах присутні табличні величини, похибки округлення табличної величини  $\sigma_{\text{дод.}} = \frac{m}{\sqrt{12}}$ , де  $m$  – одиниця розряду, до якого проводиться округлення чисельного значення.

Приклад: число  $\pi = 3,14\dots$ ,  $\langle \pi \rangle = 3,14$ ;  $m=0,01$ ;  $\sigma_{\langle \pi \rangle} = \frac{0,01}{\sqrt{12}}$ .

## 5. Зіставлення систематичної та випадкової похибок

Зіставляючи систематичні та випадкові похибки, врахуємо три можливих випадки.

1. Нехай виконується умова

$$S_{\langle x \rangle} > 3 \sigma_{\Sigma}, \quad (13)$$

тоді можна знехтувати систематичною похибкою. Кінцевий результат запишеться у вигляді (7).

2. Нехай виконується умова

$$\sigma_{\Sigma} > 3 S_{\langle x \rangle}. \quad (14)$$

У цьому випадку можна знехтувати випадковою похибкою, і кінцевий результат записати у вигляді  $x = \langle x \rangle \pm \Delta x_{\text{не\textasciitilde}но}$  з імовірністю  $\alpha$ . Тут  $\Delta x_{\text{не\textasciitilde}но}$  ( $\Delta x$  систематичне – напівширина інтервалу довіри) визначається так:  $\Delta x_{\text{не\textasciitilde}но} = \gamma_{\alpha} \times \sigma_{\Sigma}$ , де  $\gamma_{\alpha}$  – коефіцієнти Чебишева. Ці коефіцієнти залежать від імовірності  $\alpha$ , з якою істинне значення шуканої фізичної величини потрапляє до інтервалу довіри з напівшириною  $\Delta x_{\text{не\textasciitilde}но}$ .

Величина  $\gamma_{\alpha}$  для різних значень  $\alpha$  має такі значення:

$$\gamma_{\alpha} = 1,8 \text{ при } \alpha = 0,7;$$

$$\gamma_{\alpha} = 2,2 \text{ при } \alpha = 0,8;$$

$$\gamma_{\alpha} = 3,2 \text{ при } \alpha = 0,9.$$

3. Нехай  $\sigma_{\Sigma} \approx S_{\langle x \rangle}$ ; у цьому випадку результат вимірювань записується у формі:

$$x = \langle x \rangle, \Delta x_{\text{вип}} \text{ (число), з імовірністю } \alpha = \text{(число).}$$

$$S_{\langle x \rangle} = \text{(число), } n = \text{(число).}$$

Інтервал довіри для випадкової похибки при цьому не визначають.

## 6. Обговорення результатів вимірювань

Припустимо, що дослід завершено, знайдено  $\langle x \rangle$ , розраховані систематичні і випадкові похибки, визначена напівширина інтервалу довіри для заданого коефіцієнта надійності  $\alpha$ . Однак отриманий результат сумнівний.

**Приклад.** Визначили дослідним шляхом прискорення вільного падіння  $\vec{g}$ . Отримали результат  $|\vec{g}| = \langle g \rangle \pm \Delta x_{\text{вип}} = (11,2 \pm 0,8) \text{ м/с}^2$ , поклавши  $\alpha = 0,99$ . Бачимо, що відоме для даної місцевості значення  $|\vec{g}|$  ( $|\vec{g}| = 9,8 \text{ м/с}^2$ ) не потрапляє до вирахованого інтервалу довіри. Такий результат міг бути отриманий внаслідок значної систематичної похибки, що вносить експериментатор –  $\sigma_{\text{но́а}}$ . Або була запропонована невірна методика визначення  $|\vec{g}|$  (велика  $\sigma_{\text{ао́а}}$ ), що призвела до невірної оцінки напівширини інтервалу довіри  $\Delta x_{\text{сист.}}$ .

Питання про усунення чи зменшення систематичних похибок різного роду є досить складним, тому у кожному випадку розв'язується окремо.

## Література з теорії похибок

1. Сквайрс Дж. Практическая физика. – М.: Мир, 1971.
2. Диденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. – М.: Изд. МГУ, 1977.



## Додаток II

### 1. Основні фізичні сталі (округлені значення)

Фізична стала	Позначення	Значення
Нормальне прискорення вільного падіння	$g$	9,81 м/с
Гравітаційна	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярна газова стала	$R$	8,31 Дж/(моль·К)
Стандартний об'єм*	$V_m$	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$
Стала Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Елементарний заряд	$e$	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Швидкість світла в вакуумі	$c$	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Стала Стефана-Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Стала закону зміщення Віна	$b$	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Планка	$h$ $\hbar$	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ $1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Стала Ридберга	$R$	$1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Радіус Бора	$a$	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Комптонівська довжина хвилі електрона	$\lambda$	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнетон Бора	$\mu_B$	$0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Енергія іонізації атома водорода	$E_i$	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ (13,6 еВ)
Атомна одиниця маси	а.е.м.	$1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Електрична стала	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнітна стала	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$

## Навчальне видання

Укладачі: **Моїсеєнко** Володимир Іванович  
**Пугач** Ольга Віталіївна  
**Ужва** Валерій Іванович  
**Гарєєва** Фаїна Максимівна

Механіка. Методичні вказівки до лабораторних робіт з фізики.

Відповідальний редактор: Л.П.Гермаш

Комп'ютерне складання, верстання О.В.Пугач  
Формат 60×42  $\frac{1}{32}$ . Папір офсетний. Ризографія.

Авт.др.арк.1,27. Ум.др.арк.0,9. Обл.-вид.арк.1,1.

Видавець „Пугач О.В.” Свідоцтво про реєстрацію суб'єкта  
видавничої справи ДК №1560 від 05.11.2003 р.

E-mail: <olgapugach@ukr.net>