Лекція 1.

Пружні поверхневі хвилі
(хвилі Релея, Rayleigh, 1885)

Тензор деформацій.

Якщо тверде тіло деформувати зовнішніми силами, то після їх раптового виключення окремі частини тіла розпочнуть зміщуватись одна відносно іншої в намаганні створити рівноважну конфігурацію. Перехідний процес супроводжується пружними коливаннями та генерацією хвиль. Хвилі виникатимуть внаслідок сил взаємодії окремих частин тіла та інерційності їх руху. Очевидно, що характер хвильових процесів поблизу поверхонь істотно відрізняється від тих, що відбуваються глибоко в об'ємі середовища. На будь-який шар молекул, віддалених від поверхні, діють сили з двох напрямків, тоді як на поверхневий шар діють лише молекули з об'єму, тобто з одного боку.

Далі розглянемо динаміку процесів, що відбуваються на характерних довжинах, які значно перевищують відстань між окремими молекулами. У цьому випадку доцільно використовувати методи теорії суцільних середовищ. Згідно з теорією пружності, стан твердого тіла задається положенням його точок $\vec{r}$, а точніше – зміщенням цих точок

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r} \qquad (1)$$

в результаті деформування. Тут $\vec{r}$ та $\vec{r}'$ - положення точки до та після деформації. Очевидно, що коли всі точки змістяться (зсунуться) на одну і ту ж величину, то фізичний стан тіла не зміниться. Тому енергія деформованого тіла залежить не від значень $\vec{u}$, а від зміни $\vec{u}$ в сусідніх областях, в першу чергу, від похідних $\frac{\partial u(\vec{r})_i}{\partial x_k}$, де індексами i,k позначаються координатні осі, $\vec{r} = \{x, y, z\}$. На практиці використовують симетризовану лінійну комбінацію похідних, що задається виразом

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \qquad (2)$$

Величина u_{ik} називається тензором деформацій і є основним елементом лінійної теорії коливальних процесів. Далі ми переконаємося в цьому на прикладі пружних поверхневих хвиль.

Тензор напружень.

З тензором деформацій тісно пов'язана інша фізична величина - тензор напружень. При малих деформаціях сили, що виникають в пружних середовищах, є пропорційними величині деформації (закон Гука). Ця пропорційність характеризується тензором напружень. Взаємозв'язок між двома типами згаданих тензорних величин можна встановити з простих міркувань. Для цього розглянемо силу $\vec{\phi}$, що діє на невеликий елемент об'єму тіла ΔV. Вона дорівнює

$$\vec{\phi} = \int_{\Delta V} \vec{f}(\vec{r}) dV \,, \tag{3}$$

де $\vec{f}(\vec{r})$ - сила, що діє на кожну точку всередині області ΔV. Сили міжмолекулярної взаємодії є короткодіючими, тому всередині об'єму вони компенсують одна одну згідно третього закон Ньютона. Нескомпенсованими залишаються лише сили, прикладені до поверхні елемента ΔV. Отже, внесок в інтеграл (3) дає лише приповерхнева область. З іншого боку, якщо об'ємний інтеграл від фізичної величини зводиться до інтеграла по поверхні, що обмежує виділений об'єм, то ця фізична величина є дивергенцією якогось вектора $\vec{\sigma}$. Таке твердження є результатом теореми Гаусса-Остроградського. В результаті для окремих компонент вектора $\vec{\phi}$, одержимо

$$\phi_i = \int_{\Delta V} \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \sum_k \oint \sigma_{ik} ds_k \,, \tag{4}$$

де $ds_k = ds\vec{n} \cdot \vec{e}_k$, $\vec{n}$ - одиничний вектор, перпендикулярний до елемента поверхні ds і направлений назовні, $\vec{e}_k$ - одиничний вектор, орієнтований вздовж k-ї координатної осі. З виразу (4) можна зробити висновок, що величина $p_i = \sum_k \sigma_{ik} ds_k$ є i-ю компонентою сили, що діє на елемент поверхні $d\vec{s}$. Якщо вільна поверхня пружного середовища орієнтована перпендикулярно до осі z, то всі компоненти n_k дорівнюють нулю за винятком однієї, де $k = z$. У цьому випадку $n_z = 1$. Коли поверхня знаходиться в рівноважному стані, то сили, що діють на неї, дорівнюють нулю: $p_x = p_y = p_z = 0$. Звідси одержимо умову для тензора σ_{ik} (тензора напружень) на поверхні суцільного середовища, орієнтованій перпендикулярно до напрямку z:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \,. \tag{5}$$

Тензори напружень та деформацій входять симетричним чином у вільну енергію F, яка в умовах, за яких виконується закон Гука, є квадратичною формою, що має вигляд:

$$F = \sum_{ik} \frac{1}{2} \sigma_{ik} u_{ik} \ . \qquad (6)$$

Тут і далі вважається, що суцільне середовище є ізотропним. Оскільки тензор напружень визначається похідною від вільної енергії

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \ , \qquad (7)$$

то σ_{ik} є лінійною формою тензора u_{ik}, яку для ізотропного випадку можна записати через дві константи, а саме:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\sum_{l} u_{ll}\delta_{ik}\right), \qquad (8)$$

де E - модуль Юнга, а σ - коефіцієнт Пуассона.

Закон дисперсії поверхневих хвиль.

Представимо вектор деформації як суму поздовжньої та поперечної складових поля (longitudinal and transverse components):

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}_l + \vec{u}_t \ , \qquad (9)$$

Для компонент $\vec{u}_{l,t}$ повинні виконуватись умови:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{u}_l &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_t &= 0 \end{aligned} \ , \qquad (10)$$

де $\vec{\nabla}$ означає операцію $\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$.

Кожна складова в (9) є розв'язком відповідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = c_l^2 \Delta \vec{u}_l \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = c_t^2 \Delta \vec{u}_t \qquad (12)$$

де $\Delta = \vec{\nabla}^2$.

Поздовжні та поперечні хвилі в нескінченному середовищі поширюються незалежно. Проте ситуація істотно змінюється для поверхневих хвиль: біля вільної поверхні сумарна деформація $\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t$ повинна бути такою, щоб задовольнялись умови (5). Тому два типи хвиль стають зв'язаними і жоден з них не існує в "чистому" вигляді. Отже, поверхневі пружні хвилі містять як поздовжню, так і поперечну складову вектора деформації. Хоч самі рівняння (11),(12) для обох типів коливань залишаються незмінними, але гранична умова на вільній поверхні стосується повного вектора зміщення. Вона одержується з виразів (5) та (8) і має вигляд

$$u_{xz} = u_{yz} = 0,\ (u_{xx} + u_{yy})\sigma + u_{zz}(1-\sigma) = 0\ , \qquad (13)$$

де початок координат знаходиться на поверхні $z = 0$, а суцільне середовище заповнює простір в області $z \le 0$.

Будемо шукати розв'язки рівнянь (12) у вигляді

$$\vec{u}_{l,t} = \vec{d}_{l,t}(z)e^{i(kx-\omega t)}, \qquad (14)$$

де орієнтація осі x збігається з напрямком поширення поверхневої хвилі. У цьому випадку координата y не входить у вираз (14), що не зменшує загальності розгляду.

Оскільки два типи хвиль утворюють єдину поверхневу хвилю, то хвильовий вектор k та частота ω беруться однаковими для обох компонент. Після підстановки (14) у рівняння (11),(12) одержимо рівняння для амплітудного множника $\vec{d}_{l,t}(z)$:

$$\frac{\partial^2 \vec{d}_{l,t}(z)}{\partial z^2} = (k^2 - \omega^2 / c_{l.t}^2)\vec{d}_{l,t}(z). \qquad (15)$$

Локалізація хвилі біля поверхні означає, що повинні виконуватись умови

$$(k^2 - \omega^2 / c_{l,t}^2) > 0\ . \qquad (16)$$

Тоді, позначивши $\kappa_{l,t}^2 = k^2 - \omega^2 / c_{l.t}^2$, одержимо розв'язки для двох типів векторів деформацій

$$\vec{u}_{l,t} \sim e^{i(kx-\omega t)+\kappa_{l,t} z}, \qquad (17)$$

які експоненціально загасають при віддаленні від поверхні в область $z < 0$. З виразу (17) видно, що хвиля локалізується в шарі, характерна товщина якого дорівнює $1/\kappa_{l,t}$.

Щоб визначити індивідуальний внесок двох типів коливань в амплітуду поверхневої хвилі та знайти залежність частоти від хвильового вектора $\omega(k)$, тобто закон дисперсії, врахуємо граничні умови (13) та умови (10) для поперечної та поздовжньої компонент. Зокрема, з другої умови (10) одержимо

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_t = \frac{\partial u_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{tz}}{\partial z} = 0\ . \qquad (18)$$

Враховуючи формулу (17), цей вираз можна переписати у вигляді

$$iku_{tx} + \kappa_t u_{tz} = 0 \qquad (19)$$

і виразити дві амплітуди через одну величину (a):

$$u_{tx} = a\kappa_t e^{i(kx-\omega t)+\kappa_t z}$$
$$u_{tz} = -iake^{i(kx-\omega t)+\kappa_t z} \quad . \qquad (20)$$

Таким же чином з першої умови (10) для поздовжніх деформацій одержимо співвідношення

$$(\vec{\nabla}\times\vec{u}_l)_y = \frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0\,, \qquad (21)$$

яке виконується, якщо покласти

$$u_{lx} = bke^{i(kx-\omega t)+\kappa_l z}$$
$$u_{lz} = -ib\kappa_l e^{i(kx-\omega t)+\kappa_l z}\,, \qquad (22)$$

де b - якась стала.

Значення a і b не залежать від часу та координат, тому взаємозв'язок між ними встановлюється граничними умовами (13). З першої умови випливає

$$u_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0, \qquad (23)$$

коли $z = 0$.

Другу умову в (13) можна записати в дещо іншому вигляді, виразивши з відомих співвідношень теорії пружності параметри E та σ через швидкості поздовжніх та поперечних хвиль:

$$c_l^2 = \frac{E}{\rho}\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad c_t^2 = \frac{E}{2\rho}\frac{1}{(1+\sigma)} \quad . \qquad (24)$$

Тоді з (13) легко одержимо

$$c_l^2\frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2)\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0\,. \qquad (25)$$

Підставимо в (23) та (25) значення

$$u_x = u_{lx} + u_{tx}, \qquad u_z = u_{lz} + u_{tz}\,.$$

В результаті з умови (23) одержимо

$$a(k^2 + \kappa_t^2) + 2bk\kappa_l = 0\,, \qquad (26)$$

а з (25) - іншу рівність

$$2ak\kappa_t + b(k^2 + \kappa_t^2) = 0\,. \qquad (27)$$

Система двох однорідних рівнянь (26),(27) має ненульовий розв'язок лише тоді, коли

$$(k^2 + \kappa_t^2)^2 = 4k^2\kappa_l\kappa_t\,. \qquad (28)$$

Підносячи до другої степені ліву та праву частини рівняння (28), одержимо

$$(k^2+\kappa_t^2)^4 = 16k^4\kappa_l^2\kappa_t^2. \qquad (29)$$

Тепер врахуємо явні вирази для коефіцієнтів $\kappa_{l,t}^2$ і перепишемо (29) у вигляді

$$\left(2k^2-\frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4 = 16k^4(k^2-\frac{\omega^2}{c_t^2})(k^2-\frac{\omega^2}{c_l^2}). \qquad (30)$$

Рівняння (30) (дисперсійне рівняння) задає залежність $\omega(k)$. Очевидно, що його розв'язок має вигляд

$$\omega = c_t\xi k, \qquad (31)$$

де значення параметра ξ знайдемо після підстановки (31) в (30). Легко переконатись, що рівняння для ξ має вигляд

$$\left(2-\xi^2\right)^4 = 16(1-\xi^2)(1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\xi^2). \qquad (32)$$

Очевидно, що вільний член (32) скорочується, і тоді значення ξ^2 знаходяться як корені кубічного рівняння, вільним параметром якого є лише відношення квадратів швидкостей c_t^2/c_l^2.

Отже, в поверхневій хвилі, як і в об'ємній, частота пропорційна хвильовому вектору (лінійний закон дисперсії поверхневі хвилі). Тому групова та фазова швидкості однакові і дорівнюють $c_t\xi$. Аналіз показує, що значення параметра ξ для різних середовищ дещо менше одиниці. Тому швидкість поверхневих хвиль менша не лише від швидкості поздовжніх, але й поперечних хвиль. З фізичної точки зору, такий результат є очікуваним, оскільки пружні сили, що діють на зміщення елемента поверхні, існують лише з боку середовища, але не вакууму.

Висновки.

Наш розгляд базувався на припущенні, що вільна поверхня є плоскою. Якщо на ній існують неоднорідності (зокрема, забруднення), то поверхневі хвилі можуть розсіюватись на них або навіть змінювати частоту. Такі явища можуть виявлятись експериментальними дослідженнями. Отже, існує принципова можливість досліджувати стан поверхні, вивчаючи поширення поверхневих пружних хвиль.

Очевидно, що експериментальні методи можуть бути ефективними, коли довжина хвилі така ж або менша, ніж розмір неоднорідності. І тут потрібно зробити важливе застереження. В запропонованому підході відсутні обмеження на можливу довжину хвилі, значення якої обернено пропорціональне хвильовому вектору: $\lambda = 2\pi/k$. Проте характерні значення λ не можуть бути меншими, ніж відстань між частинками, що утворюють середовище. Інакше кажучи, таке пружне середовище не можна вважати суцільним і запропонований тут підхід не є коректним.

В наступній лекції ми побачимо, як впливає дискретність структури твердого тіла та його обмеженість на спектр пружних коливань. Особливу увагу звернемо на високочастотні коливання саме у тій області, де відсутня лінійна залежність $\omega(k) \sim k$.

Література:

Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, "**Теория упругости**", Москва, "Наука" 1987 г., 246 с.