Лекція 13

Поширення електромагнітних хвиль між плоско-паралельними металевими поверхнями. Сила Казимира.

Перш за все розглянемо, які саме моди електромагнітного поля існують у проміжку між двома плоскими металевими поверхнями. Загальний підхід до такого типу задач ми вже проілюстрували на прикладі поверхневих хвиль, де мова йшла про дослідження поверхневих плазмон-поляритонів (Лекц. 3). Обмеженість простору, в якому поширюються хвилі, істотно впливає і на конфігурацію полів окремих мод, і на їх закон дисперсії. Крім того, у випадку малих характерних відстаней між поверхнями починають проявлятись квантові ефекти. Із загальних міркувань можна припустити, що це мають бути відстані такого ж порядку, як і довжини хвиль, що розповсюджуються у вакуумному проміжку між металами. Саме на основі квантової теорії в 1948 р. було пояснено ефект Казимира (див. роботу [1]).

Щоб зрозуміти його суть, потрібно врахувати, що, згідно загальних законів квантової механіки, амплітуди хвиль ніколи не набувають нульових значень. Навіть за відсутності зовнішнього джерела електромагнітного поля у проміжку між поверхнями існують флуктуаційні коливання. Хоч їх амплітуди істотно залежать від температури системи, збільшуючись зі зростанням останньої, проте і при нульовій температурі такі коливання не зникають. Їх називають нульовими коливаннями вакууму, підкреслюючи відсутність в них реальних квантів енергії. Тому ці коливання в принципі не можуть генерувати квантові переходи в системі і їх важливість недооцінювалась протягом тривалого часу, незважаючи на те, що при низьких температурах саме нульові коливання дають основний внесок у повну енергію системи.

На простому прикладі ми покажемо, як змінюється енергія поля системи, якщо змінювати відстань між металевими поверхнями. Повна енергія нульових коливань в системі збільшується, якщо над нею виконується робота. Саме це можна спостерігати, коли збільшувати відстань між поверхнями. Відповідну силу взаємодії (притягання) пластин ми знайдемо як похідну (зі знаком "мінус") від енергії нульових коливань по відстані між поверхнями. Ця сила є проявом ефекту Казимира, який відіграє важливу роль у багатьох природних явищах. Для побудови строгої теорії спочатку потрібно дослідити характеристики хвильових процесів у вакуумному проміжку.

Дисперсійне рівняння для хвиль.

Поширення хвиль у вакуумі описується рівнянням

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

яке одержане з рівнянь Максвелла (див. третю лекцію). На рис. 1 показані дві поверхні металів, площі яких $S = L_x L_y$ настільки великі, що можна нехтувати крайовими ефектами. У цьому випадку повинна існувати очевидна нерівність $L_{x,y} >> a$.

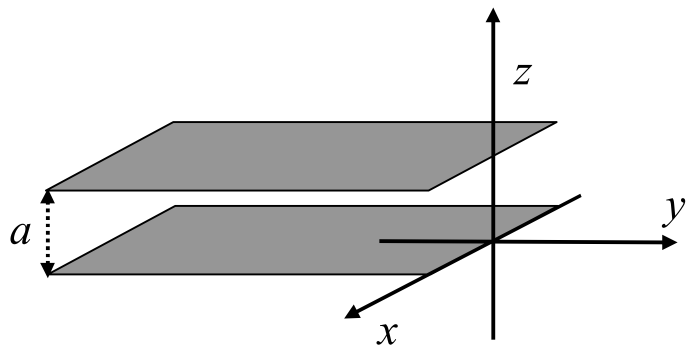

Рис. 1. Дві металеві поверхні, віддалені одна від іншої на відстань a .

Для плоских хвиль, поле яких задається виразом $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$, граничні умови на поверхнях металів не виконуються. У нашому випадку, коли $L_x, L_y \to \infty$, поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$ можна представити у вигляді

$$\vec{E} = \vec{E}_0(z) e^{i(\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp - \omega t)} . \qquad (2)$$

(Тут і далі позначення векторів з нижніми індексами ($\perp$) означає наявність лише їх x, y -их компонент.) Залежність від координати z врахуємо лише множником $\vec{E}_0(z)$. Підставляючи (2) в (1), одержимо просте рівняння для повного поля $\vec{E}$:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2\right)\vec{E} , \qquad (3)$$

де вважаємо, що $\frac{\omega^2}{c^2} > k_\perp^2$ і тому величина $\kappa^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2 > 0$. Зазначимо, що при дослідженні поверхневих плазмонних хвиль ми розглядали протилежний випадок $\kappa^2 < 0$, чим забезпечувалась локалізація поля біля поверхні.

Далі розглянемо випадок ідеальних провідників, для яких виконуються умови

$$\vec{E}_\perp(z = 0, a) = 0, \quad \frac{\partial E_z(z = 0, a)}{\partial z} = 0 . \qquad (4)$$

З фізичної точки зору ці умови означають, що поле $\vec{E}_\perp$ не проникає в метал внаслідок високої електропровідності останнього. Інакше в поверхневому шарі існував би нескінченно великий струм. Умови для E_z означають, що у біля поверхні провідника формується заряд, поле якого, додаючись до поля E_z, забезпечує рівність нулеві E_z навіть при незначному віддаленні від поверхні всередину металу. Отже, обидві умови в (4) означають непроникнення електричного поля в метал.

Запишемо вираз для $\vec{E}_\perp$ у такому вигляді:

$$\vec{E}_\perp = \vec{C}_1 e^{i\kappa z} + \vec{C}_2 e^{-i\kappa z}. \tag{5}$$

З граничних умов на поверхнях одержимо два рівняння

$$\begin{aligned} &\vec{C}_1 + \vec{C}_2 = 0 \\ &\vec{C}_1 e^{i\kappa a} + \vec{C}_2 e^{-i\kappa a} = 0 \end{aligned} \cdot \tag{6}$$

Тоді

$$\vec{E}_\perp = i2\vec{C}_1 \sin(\kappa z) \equiv \vec{A} \sin(\kappa z), \tag{7}$$

а κ може набувати лише дискретних значень

$$\kappa = \kappa_n \ , \tag{8}$$

де $\kappa_n = \pi n / a, \quad n = 1, 2, \ldots$.

Враховуючи другу умову (4), можемо записати загальний вираз для z - го поля

$$E_z = B\cos(\kappa z). \tag{9}$$

В рівн. (7) фігурують дві незалежні константи A_x, A_y. В той же час поле хвилі має задовольняти третє рівняння Максвелла (тобто рівняння Пуассона): $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. З нього знайдемо значення константи B, яка виражається через незалежні величини A_x, A_y:

$$B = i\vec{k}_\perp \cdot \vec{A} / \kappa_n . \tag{10}$$

Отже, як і у випадку плоскої хвилі, де для кожного значення $\vec{k}$ існують дві незалежні хвилі із взаємно перпендикулярними поляризаціями, маємо подібну ситуацію: для кожного набору $\vec{k}_\perp, \kappa_n$ існують дві незалежні хвилі з однаковою частотою

$$\omega_{k_\perp, n} = c\sqrt{k_\perp^2 + \kappa_n^2} . \tag{11}$$

При нульовій температурі вони проявляють себе як нульові коливання вакууму.

Ефект Казимира.

Для розглянутої вище системи гамільтоніан має вигляд:

$$\hat{\mathrm{H}} = \sum_{\vec{k}_\perp, m, s} \hbar\omega_{\vec{k}_\perp, n}\left(\hat{n}_{\vec{k}_\perp, n, s} + \frac{1}{2}\right), \tag{12}$$

де $\hat{n}_{\vec{k}_\perp, n, s}$ - оператор кількості частинок (квантів) для хвиль, що характеризуються двовимірним хвильовим вектором $\vec{k}_\perp$ та цілим числом n. Додатковий індекс s нумерує дві незалежні моди (тобто такі, що мають різні поляризації) для заданих значень $\vec{k}_\perp$ та n.

Коли температура наближається до абсолютного нуля, то перший член в дужках можна не враховувати, оскільки кількість квантів у вакуумному стані прямує до нуля. Для оцінки середнього значення $\hat{n}_{\vec{k}_\perp, n, s}$ використаємо розподіл Планка

$$\left\langle \hat{n}_{\vec{k}_\perp, n, s} \right\rangle = \left(e^{\hbar\omega_{k_\perp, n}/T} - 1\right)^{-1}. \tag{13}$$

Середнє значення в лівій частині є найбільшим, якщо покласти $k_\perp = 0, n = 1$. Тоді показник експоненти в правій частині дорівнює $\hbar c \dfrac{\pi}{aT}$. Для кімнатної температури ця величина значно більша за одиницю, коли $a < 2 \cdot 10^{-3}$ см. Вже при мікронних відстанях цей критерій добре виконується. Знехтувавши оператором кількості частинок у правій частині (12), одержимо енергію системи $W(a)$ у вигляді

$$W(a) = \sum_{\vec{k}_\perp, n} \hbar\omega_{\vec{k}_\perp, n}, \tag{14}$$

де ми вже просумували по s, тобто по різних поляризаціях хвиль. Як бачимо, енергія $W(a)$ визначається сумарною енергією нульових коливань електромагнітного поля.

Наявність ненульового значення енергії поля $W(a)$, яка в загальному випадку є функцією відстані між пластинами, означає, що між пластинами повинна існувати взаємодія. Проте, коли взяти цю силу рівною похідній (із знаком мінус) від енергії поля по відстані між пластинами, то ми не одержимо правильного результату. Причиною цього є хоча б та обставина, що сума в правій частині (14) дорівнює нескінченності. Така ситуація є типовою для задач квантової електродинаміки. Проте нас цікавитиме не сама енергія (14), а різниця енергії (14) та енергії поля $W_0(a)$ у цьому ж проміжку, знайдена без врахування впливу границь. Інакше кажучи, ми хочемо знайти зміну енергії, зумовлену наявністю границь. Забігаючи наперед, зазначимо що в цій різниці енергій вже не існуватиме згаданої розбіжності. Легко збагнути, що знайдена таким чином сила взаємодії пластин є рівнодійною між силами відштовхування, зумовленими "внутрішнім" вакуумом, та притисненням пластин одна до одної "зовнішнім" вакуумом. Далі побачимо, що притиснення переважає відштовхування. Наслідком цього є ефективне притягування пластин.

Далі, щоб уникнути математичних операцій з нескінченними величинами, ми застосуємо один з можливих штучних прийомів регуляризації суми (14): ми помножимо кожен її член на експоненціальний множник

$$e^{-\delta\,\omega_{k_\perp,m}}, \tag{15}$$

де $\delta > 0$. Після цього сума стане скінченною. На завершальному етапі обчислень можна буде спрямувати δ до нуля і переконатись, що сила Казимира є скінченною величиною.

В літературі існує і певне фізичне обґрунтування описаної процедури. Воно полягає в тому, що при дуже великих частотах не можна забезпечити виконання граничних умов для полів (4). Дійсно, зі збільшенням частоти електромагнітного поля воно починає проникати в метал, оскільки провідність є хоч і великою, але скінченною. В результаті такого проникнення ефективна товщина щілини збільшується, що виражається в зменшенні частоти $\omega_{k_\perp m}$ у порівнянні з тим значенням, що задається виразом (11). Формально це зменшення можна врахувати множником (15).

Після переходу від суми по $\vec{k}_\perp$ до інтегралу

$$\sum_{\vec{k}_\perp} = \frac{S}{(2\pi)^2}\int dk_x dk_y \tag{16}$$

вираз для енергії W набуде вигляду

$$W(a) = \frac{Sc\hbar}{(2\pi)^2}\int d\vec{k}_\perp \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{k_\perp^2 + \frac{\pi^2}{a^2}n^2}\,e^{-\delta\omega_{k_\perp,n}} = \\ = \frac{Sc\hbar}{8\pi a}\int d\vec{k}_\perp \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sqrt{k_\perp^2\frac{a^2}{\pi^2} + n^2}\left(1-\delta_{n,0}\right)e^{-\delta\omega_{k_\perp,n}}. \tag{17}$$

Тут ми переписали суму по n у симетричному (відносно нижньої та верхньої меж) вигляді, поширивши її на область від'ємних значень n. Далі опускатимемо член з $\delta_{n,0}$, оскільки внесок відповідного доданка в $W(a)$ не залежить від a і тому він не впливає на значення сили Казимира.

Величина енергії W_0 знаходиться з простих якісних міркувань. Енергія вакуумного електромагнітного поля в об'ємі $V = SL_z$, де $L_z \to \infty$ (див. рис. 2) дорівнює

$$W(V) = \frac{Vc\hbar}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}_\perp dk_z \sqrt{k_\perp^2 + k_z^2} \,. \qquad (18)$$

Частка цієї енергії, що знаходиться в межах щілини, задається очевидним співвідношенням:

$$W_0(a) = \frac{a}{L_z} W(V) \,. \qquad (19)$$

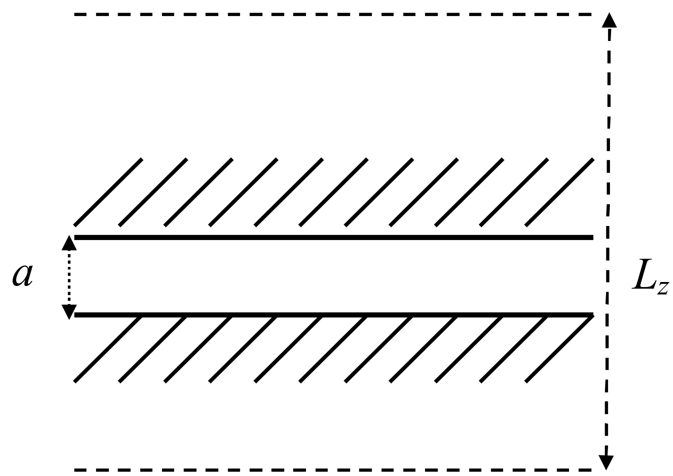

Рис. 2.

Вводячи нову змінну $t = \frac{a}{\pi} k_z$, різницю між $W(a)$ та $W_0(a)$ запишемо у вигляді

$$W(a) - W_0(a) = \frac{Sc\hbar}{8\pi a} \int d\vec{k}_\perp \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_\perp, n) - \int_{-\infty}^{\infty} dt f(k_\perp, t) \right], \qquad (20)$$

де

$$f(k_\perp, t) = \sqrt{\frac{a^2}{\pi^2} k_\perp^2 + t^2} e^{-\delta\omega_{k_{\perp,n}}} \,. \qquad (21)$$

Як бачимо, від суми дискретних значень функції $f(n)$ (величина дискретності $\Delta n = 1$), знайденої в інтервалі $[-\infty, +\infty]$, віднімається інтеграл, знайдений у тому ж інтервалі, від неперервної функції $f(t)$. Оскільки функція $f(t)$ є додатною і монотонно зростає зі збільшенням $|t|$, то неважко переконатись, що величина в квадратних дужках (20) має від'ємне значення.

Можна помітити, що права частина (20) пропорційна a^{-3}. Дійсно, якщо замінити значення $k_{\perp x,y}$ на $p_{x,y} \frac{\pi}{a}$, де області змін безрозмірних величин

$p_{x,y}$ знаходяться в інтервалі $[-\infty, +\infty]$, то одержимо саме згадану залежність a^{-3}, оскільки $d\vec{k}_{\perp} = \frac{\pi^2}{a^2} dp_x dp_y = \frac{\pi^2}{a^2} d\vec{p}$.

Проведений аналіз вказує на те, що різниця енергій $W(a) - W_0(a)$ пропорційнальна $Sc\hbar a^{-3}$. Детальні розрахунки безрозмірного коефіцієнта пропорціональності можна знайти в роботах [2, 3]. В результаті було одержано:

$$W(a) - W_0(a) = -\frac{\pi^2 Sc\hbar}{2^4 \times 45 a^3}. \tag{22}$$

Тоді сила притягання між пластинами в перерахунку на одиницю площі поверхні дорівнює:

$$F(a) = -\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial a}(W - W_0) = -\frac{\pi^2 c\hbar}{240 \times a^4}. \tag{23}$$

Як бачимо, сила Казимира має як релятивістську, так і квантову природу, оскільки вона пропорційна швидкості світла c та сталій Планка $\hbar$. Наявність притягання можна інтерпретувати як різницю тисків вакууму, що знаходиться зовні металевих пластин, та вакууму між пластинами. Оскільки результуюча сила спричинює ефект притягання, то можна говорити, що тиск ззовні більший, ніж тиск ізсередини. Це пояснюється тим, що густина енергії нульових коливань за межами пластин більша, ніж у проміжку між ними. Така ситуація спричинена вираженим дискретним характером власних значень κ_n. Фактично, саме цей аргумент використаний вище (див. текст після формули (21)) для якісного пояснення знаку різниці енергій $W(a) - W_0(a)$.

В літературі існує альтернативне пояснення фізичної природи притягання пластин. Вважається, що воно виникає внаслідок притягання між зарядами, які випадково з'являються або зникають на поверхнях. Так, наприклад, коли позитивний заряд з'являється на верхній поверхні, то він автоматично індукує негативний заряд на нижній. Заряди з протилежними знаками притягуються між собою, що й спричинює ефект притягання пластин. Флуктуації поверхневого заряду можуть бути теплової природи. Проте при низьких температурах (значно менших характерних енергій квантів власних коливань поля) – це будуть лише ті, що зумовлені нульовими коливаннями вакууму. Саме цей випадок і був розглянутий у наведеній вище теорії. Тому різні, як здається на перший погляд, пояснення не суперечать одне одному, оскільки фізичною причиною, що зумовлює дискретність спектру власних коливань електромагнітного поля, є вже згадані флуктуаційні рухи зарядів, які перешкоджають проникненню поля в провідники.

Можна порівняти силу Казимира із силою електростатичного притягання між зарядженими пластинами при заданій різниці потенціалів V_e між ними. Прості розрахунки показують, що величина цієї сили на одиницю поверхні дорівнює

$$F_e(a) = -\frac{V_e^2}{8\pi a^2} . \qquad (24)$$

Порівняння виразів (23) та (24) вказує на те, що сила Казимира (23) зростає зі зменшенням a значно швидше, ніж електростатична сила (24). Тому при дуже малих відстанях між провідниками сила Казимира превалює. Її потрібно враховувати при проектуванні складних наносистем, притягання між елементами якої може призводити до їх деформації, а то й руйнування. Ця сила є актуальною в задачах наномеханіки, оскільки може істотно змінити і рівняння руху (див., наприклад, роботу (4)), і умови рівноваги окремих частин наносистеми.

Сила Казимира не зникає при заміні металів діелектриками: вона лише істотно модифікується, оскільки електромагнітне поле проникає в діелектрик. Лише моди, локалізовані в області щілини, дають внесок в ефект Казимира (див. роботи [2-6]).

Важливою є й інша обставина: якщо відстань між матеріалами дуже мала, то, як вказувалось вище, електромагнітне випромінювання може частково проникати в метал. Це відбудеться тоді, коли $c\frac{\pi}{a} > \omega_p$, тобто коли частота коливань у щілині більша плазмової частоти і провідність металу не можна вважати нескінченною. Тоді електрони провідності "не встигають відслідковувати" зміни поля хвилі і тому не екранують його в достатній мірі. У цьому випадку теоретичний опис ефекту Казимира принципово не відрізнятиметься від опису в діелектриках (див. [6], гл. VIII, параграф 82), і тоді притягання металевих поверхонь задаватиметься формулою

$$F(a) = -\frac{\hbar\omega_p}{32\sqrt{2}\pi a^3} . \qquad (25)$$

Це значення сили значно менше, ніж те, що дає вираз (23).

Література.

1. H.B.G. Casimir, On the Attraction between Two Perfectly Conducting Plates, **Proc. Kon. Nederl. Acad. Wet. 51**, 793 (1948).

2. M. Bordag, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko, New developments in the Casimir effect, **Phys. Rep., 353**, pp.1-205 (2001).

3. О. Чумак, **"Квантова оптика"**, "Lviv Evrosvit", 272 ст. (2012).

4. A.A. Chumak, P.W. Milonni, and G.P. Berman, Effects of electrostatic fields and Casimir force on cantilever vibrations, **Phys. Rev. B 70**, 085407 (2004).

5. P.W. Milonni, "The Quantum Vacuum. An Introduction to Quantum Electrodynamics", **Academic Press, INC,** (1994).

6. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц "Статистическая физика. Теория конденсированного состояния" **т. 9**, ч. 2., **Москва, "Наука"** (1978).